



Titre: Analyse numérique de l'écoulement turbulent se développant
derrière une marche descendante par simulation des grandes
échelles
Title:

Auteur: Roberto Marrano
Author:

Date: 2001

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Marrano, R. (2001). Analyse numérique de l'écoulement turbulent se développant
derrière une marche descendante par simulation des grandes échelles [Ph.D.
thesis, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.
Citation: <https://publications.polymtl.ca/8615/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie:
PolyPublie URL: <https://publications.polymtl.ca/8615/>

**Directeurs de
recherche:**
Advisors:

Programme: Unspecified
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ANALYSE NUMÉRIQUE DE L'ÉCOULEMENT TURBULENT SE
DÉVELOPPANT DERRIÈRE UNE MARCHE DESCENDANTE PAR
SIMULATION DES GRANDES ÉCHELLES

ROBERTO MARRANO
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIE DOCTOR
(GÉNIE MÉCANIQUE)

MAI 2001



**National Library
of Canada**

**Acquisitions and
Bibliographic Services**

**395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada**

**Bibliothèque nationale
du Canada**

**Acquisitions et
services bibliographiques**

**395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada**

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-65545-8

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée:

ANALYSE NUMÉRIQUE DE L'ÉCOULEMENT TURBULENT SE
DÉVELOPPANT DERRIÈRE UNE MARCHE DESCENDANTE PAR
SIMULATION DES GRANDES ÉCHELLES

présentée par: MARRANO Roberto

en vue de l'obtention du diplôme de: Philosophiæ Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de:

M. PELLETIER Dominique, Ph.D., président

M. CAMARERO Ricardo, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. MCKENTY François, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. PRUDHOMME Michel, Ph.D., membre

M. MACIEL Yvan, Ph.D., membre

REMERCIEMENTS

Je tiens d'abord à remercier mon directeur de recherche M. Ricardo Camarero, de m'avoir donné l'opportunité de travailler dans son équipe de recherche à la Polytechnique et au CERCA (centre de recherche en calcul appliqué). Malgré un horaire extrêmement chargé, M. Camarero m'a toujours témoigné une admirable attention et une grande confiance. Je remercie également mon codirecteur de recherche François McKenty, qui par son expertise et son expérience de la mécanique des fluides, m'a permis d'améliorer ma compréhension de la turbulence.

Je tiens à remercier Thierry Aurier qui, durant son séjour postdoctoral en 1996 à l'École Polytechnique de Montréal, m'a enseigné les fondements du fascinant monde de la turbulence. Durant cette même période, le professeur Jean-Yves Trépanier m'a donné l'occasion d'améliorer mon niveau de programmation en travaillant sur les logiciels de simulations numériques GEO, MARS et VENUS de l'École Polytechnique. Je lui suis reconnaissant pour la confiance qu'il m'a toujours témoignée.

Je voudrais également exprimer ma gratitude à André Garon qui a été l'instigateur de ce travail sur la simulation des grandes échelles et qui a grandement contribué à la réussite de ce travail par ses explications détaillées et enrichissantes concernant la turbulence et les méthodes numériques. Merci aussi à Dominique Pelletier pour ses conseils et son soutien notamment durant la dernière année puisqu'il m'a rendu de nombreuses visites pour s'informer de l'avancement de mon travail lors de ses passages au CERCA. Grâce à M. Pelletier, j'ai eu l'honneur de rencontrer les professeurs Ned Djilali et Frédéric Péneau à la conférence CFD2K en juin 2000. Ils ont accepté avec une grande gentillesse de répondre à mes nombreuses questions sur la méthode LES et de partager leur expérience de ce domaine. Je tiens particulièrement à exprimer mes plus sincères remerciements à Frédéric Péneau qui, par

de fréquentes discussions par courriel, a toujours été disponible pour approfondir certains aspects de ce projet.

Je remercie également Michel Béland et Jacques Richer du CERCA de m'avoir donné de précieux conseils en ce qui concerne la vectorisation du code de calcul sur le calculateur NEC-SX5 ainsi que Richard Lefebvre et Pierre Hamelin pour leur disponibilité à solutionner les problèmes informatiques que j'ai occasionnellement rencontrés. Merci aussi à Julien Dompierre du CERCA pour sa grande disponibilité et son aide précieuse concernant l'utilisation du logiciel de traitement de texte L^AT_EX.

Je tiens à remercier mes amis Steven Dufour et Éric Turgeon pour les agréables moments passés à tous les dimanches matins de *Grand Prix de Formule Un* au "*Champs*". Je veux également souligner toutes les discussions enrichissantes que j'ai eues le plaisir d'avoir avec Éric Turgeon sur la mécanique des fluides durant nos nombreuses parties de badminton. Je pense aussi à tous mes collègues et amis, Samir Rida, Marie-Isabelle Farinas, Luc Gravel, Alberto Pueyo, Sébastien Geoffroy et Yannick Sirois qui ont toujours contribué à l'esprit de camaraderie au CERCA ainsi qu'à mon frère Claudio pour son soutien de toujours.

Enfin, je remercie vivement ma conjointe Nathalie Grignon d'avoir révisé et corrigé avec beaucoup de patience l'orthographe de l'ensemble du texte de cette thèse. Ses nombreuses suggestions ont permis d'améliorer grandement la clarté du contenu de ce travail. Je lui suis infiniment reconnaissant pour le soutien inconditionnel qu'elle m'a toujours témoigné. Je tiens aussi à exprimer mon plus grand respect à mes parents qui m'ont inculqué des qualités indispensables pour la réussite de ce travail: la persévérance, la rigueur et la passion des choses que l'on entreprend.

RÉSUMÉ

Dans ce travail de recherche, la turbulence se développant derrière une marche descendante est analysée par simulation des grandes échelles (LES) pour des écoulements incompressibles. L'aptitude de cette méthode à prédire adéquatement les caractéristiques des écoulements turbulents de nature industrielle a été vérifiée par l'utilisation de ce cas-test en confrontant les résultats obtenus aux mesures expérimentales pour les paramètres suivants: la longueur moyenne de rattachement, la distribution de vitesse moyenne axiale, les profils de l'intensité de turbulence axiale et la fréquence caractéristique de l'écoulement.

Le code de calcul DFMAC développé à cette fin a été implanté afin de résoudre des écoulements tridimensionnels et instationnaires avec une précision d'ordre deux dans les domaines temporel et spatial. Les fondements de l'approche numérique utilisée reposent sur une méthode à pas fractionnaire et sur une technique de factorisation approchée. La discrétisation des équations filtrées de continuité et de Navier-Stokes est effectuée par la technique des différences finies et les variables primitives u, v, w et p sont localisées sur un maillage décalé de type MAC. L'ensemble des opérations du code de calcul a été vectorisé afin d'atteindre un niveau de performance élevé en terme de temps de calcul sur le calculateur scientifique NEC-SX5. La turbulence de sous-maille est représentée par les modèles de Smagorinsky, de fonction de structure et des approches dynamiques classique et mixte.

La démonstration de la faisabilité et de l'aptitude de la méthode LES à résoudre un écoulement turbulent dont le nombre de Reynolds est relativement élevé ($Re_H = 11000$ et $Re_H = 39000$) sans toutefois recourir à une loi de paroi constitue l'aspect innovateur de cette étude. Les résultats numériques concordant le mieux avec les mesures expérimentales ont été obtenus avec le modèle de l'approche dynamique

mixte (ADM). Ce modèle s'est en effet révélé être le plus apte à représenter adéquatement la physique de sous-maille, par exemple, le phénomène de réinjection de l'énergie des petites structures vers les grandes.

Pour les deux nombres de Reynolds étudiés, les analyses comparatives entre la méthode LES et la modélisation $k - \epsilon$ ont révélé que cette dernière sous-estime significativement la longueur de rattachement alors que la concordance des résultats obtenus de la méthode LES avec les mesures expérimentales est excellente. La précision de la modélisation $k - \epsilon$ s'avère en effet contrainte par différentes hypothèses qui lui sont inhérentes alors que la méthode LES comporte quant à elle une contrainte liée à la finesse du maillage pouvant être utilisée puisque le temps de calcul en est le paramètre le plus limitatif.

Il est cependant permis d'envisager l'utilisation courante de la méthode LES pour les applications industrielles d'ici quelques années étant donné les progrès accomplis dans le développement de la puissance des calculateurs scientifiques.

ABSTRACT

In this study, the turbulence evolving behind a backward facing step is investigated by means of large eddy simulation (LES) for incompressible flows. The ability of this method to adequately predict the turbulent flow characteristics for engineering flows is verified by comparing numerical predictions with experimental measurements for parameters such as reattachment length, axial mean velocity distributions, axial turbulence intensity profiles and flow dominant frequency.

For this purpose, a time and space second order accuracy finite difference code called DFMAC was developed for numerical computation of unsteady three dimensional flows. The numerical method is based on a fractional step procedure and an approximate factorization technique. The continuity and Navier-Stokes filtered equations are discretized with a finite difference method and a staggered grid methodology is adopted for the primitive variables u, v, w and p . The whole code instructions are vectorized in order to achieve high-performance on the scientific calculator NEC-SX5 in term of computational time. The influence of subgrid-scale turbulence is represented by the Smagorinsky model, the structure function model, the dynamic classical and dynamic mixed approaches.

The feasibility and the capability of the LES method to compute a relative high Reynolds number flows ($Re_H = 11000$ and $Re_H = 39000$) without resorting to a wall function constitutes the innovative aspect of this study. The best agreement between numerical results and experimental data is obtained with the dynamic mixed approach. In fact, this model showed to be more appropriate to represent the subgrid-scale physic as, for example, the backscattering phenomenon of energy from small scales to larger ones.

For both Reynolds numbers studied, comparative analyses between LES method and $k - \epsilon$ modeling have revealed that the latter underestimates significantly the reattachment length while the agreement between LES results and experimental data is excellent. In fact, $k - \epsilon$ modeling is constrained to its inherent assumptions while the most important limitation of LES is related to the number of grid points that can be used since, for practical reasons, the computational time is the restrictive parameter.

However, with the progress made in the development of scientific computers power, it is allowed to consider that LES method will be routinely used in a near future for engineering problems.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS	iv
RÉSUMÉ	vi
ABSTRACT	viii
TABLE DES MATIÈRES	x
LISTE DES TABLEAUX	xiv
LISTE DES FIGURES	xvi
LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES	xxv
LISTE DES ANNEXES	xxx
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 REVUE BIBLIOGRAPHIQUE	6
1.1 Introduction à la turbulence	7
1.2 Théorie de Kolmogorov: cascade d'énergie	12
1.3 Modélisation et simulation de la turbulence	14
1.3.1 Modélisation statistique (RANS)	15
1.3.2 Simulation directe (DNS)	17
1.3.3 Simulation des grandes échelles (LES)	18
1.4 Modèles de sous-maille utilisés dans la simulation des grandes échelles	19
1.4.1 Modèle de Smagorinsky et l'approche dynamique classique	20

1.4.2	Modèle de similitude d'échelles et l'approche dynamique mixte	21
1.4.3	Modèle de fonction de structure	22
1.4.4	Autres modèles de sous-maille	23
1.5	Méthodes numériques	24
1.5.1	Discrétisation temporelle et spatiale	24
1.5.2	Conditions initiales et frontières	27
CHAPITRE 2	SIMULATION DES GRANDES ÉCHELLES	31
2.1	Introduction	31
2.2	Notion de filtrage	32
2.3	Les filtres	34
2.4	Propriétés des filtres	36
2.5	Équations de Navier-Stokes filtrées	38
2.6	Caractéristiques d'un modèle de sous-maille	43
CHAPITRE 3	MODÉLISATION DE SOUS-MAILLE	45
3.1	Introduction	45
3.2	Modèle de Smagorinsky	46
3.3	Modèle de fonction de structure	50
3.4	Modèle de similitude d'échelles	53
3.5	Modèles dynamiques	57
3.5.1	Approche dynamique classique	59
3.5.2	Approche dynamique mixte	63
CHAPITRE 4	RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES TRIDIMENSIONNELLES	68
4.1	Introduction	68
4.2	Méthode à pas fractionnaire et discrétisation de l'équation de Navier- Stokes	69

4.3	L'équation du mouvement	72
4.3.1	Conditions frontières pour le champ \hat{u}_i	72
4.3.2	Résolution de l'équation du mouvement: factorisation ap- prochée	73
4.4	L'équation de Poisson pour la pression	75
4.4.1	Obtention de l'équation de Poisson	75
4.4.2	Résolution de l'équation de Poisson	78
4.5	Discussion sur le schéma numérique utilisé	81
4.6	Résumé de l'algorithme numérique utilisé	84
CHAPITRE 5 VÉRIFICATION ET VALIDATION DU CODE		85
5.1	Introduction	85
5.2	Cas analytique de Ethier et Steinman, 1994	86
5.3	Marche descendante d'Armaly <i>et al.</i> , 1983	91
CHAPITRE 6 SIMULATION TRIDIMENSIONNELLE DE L'ÉCOULEMENT TURBULENT DERRIÈRE UNE MARCHE DESCENDANTE		98
6.1	Introduction	98
6.2	Simulation de la marche avec $Re_H = 11000$	100
6.2.1	Conditions initiales et frontières	100
6.2.2	Discrétisation spatiale et temporelle	102
6.2.3	Méthode d'obtention des champs moyens	104
6.2.4	Champs moyens de l'écoulement	107
6.2.4.1	Longueur moyenne de rattachement: x_r/H	107
6.2.4.2	Distribution de la vitesse moyenne axiale: $\langle \bar{u} \rangle / U_o$	111
6.2.4.3	Intensité de turbulence axiale: $\langle u'^2 \rangle / U_o^2$	115
6.2.4.4	Effet du raffinement du maillage	118

6.2.4.5	Comparaison entre l'ADC et l'ADM	125
6.2.4.6	Analyse spectrale	128
6.2.4.7	Champ de pression	130
6.2.5	Mémoire et temps de calcul requis	132
6.2.6	Comparaison avec le modèle $k - \epsilon$	133
6.2.7	Champs instantanés de l'écoulement	137
6.3	Simulation de la marche avec $Re_H = 39000$	140
6.3.1	Conditions initiales et frontières	140
6.3.2	Discretisation spatiale et temporelle	141
6.3.3	Champs moyens de l'écoulement	142
6.3.3.1	Longueur moyenne de rattachement: x_r/H	142
6.3.3.2	Distribution de la vitesse moyenne axiale: $\langle \bar{u} \rangle / U_o$	144
6.3.3.3	Intensité de turbulence axiale: $\langle u'^2 \rangle / U_o^2$	148
6.3.3.4	Tenseur de Reynolds: $-\langle u' v' \rangle / U_o^2$	152
6.3.3.5	Comparaison entre l'ADC et l'ADM	152
6.3.3.6	Analyse spectrale	154
6.3.4	Mémoire et temps de calcul requis	156
6.3.5	Comparaison avec le modèle $k - \epsilon$	156
6.3.6	Champs instantanés de l'écoulement	162
CONCLUSION		165
RÉFÉRENCES		169
ANNEXES		178

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 5.1	Évolution de l'erreur globale à $t = 0.1s$ pour les différents champs u , v , w et p	88
Tableau 6.1	Discrétisation spatiale et temporelle employée lors de la simulation de la marche d'Eaton, 1980. Cas où $Re_H = 11000$	103
Tableau 6.2	Longueurs moyennes de rattachement obtenues avec le code DFMAC selon les différents maillages spécifiés au tableau 6.1 et modèles de sous-maille choisis. Cas où $Re_H = 11000$. Valeur expérimentale obtenue par Eaton, 1980: $x_r/H = 7.0 \pm 0.1$	110
Tableau 6.3	Mémoire, temps de calcul et efficacité de calcul pour les simulations LES effectuées avec l'ADM. Cas où $Re_H = 11000$	132
Tableau 6.4	Comparaison de la longueur moyenne de rattachement obtenue avec la simulation LES et la modélisation $k - \epsilon$ pour le cas où $Re_H = 11000$	134
Tableau 6.5	Discrétisation spatiale et temporelle employée lors de la simulation de la marche d'Eaton, 1980. Cas où $Re_H = 39000$	141
Tableau 6.6	Longueurs moyennes de rattachement obtenues avec le code DFMAC selon les différents maillages spécifiés au tableau 6.5 et modèles de sous-maille choisis. Cas où $Re_H = 39000$. Valeur expérimentale obtenue par Eaton, 1980: $x_r/H = 8.0 \pm 0.1$	143

Tableau 6.7	Mémoire, temps de calcul et efficacité de calcul pour les simulations LES effectuées avec l'ADC et l'ADM. Cas où $Re_H = 39000$	156
Tableau 6.8	Comparaison de la longueur moyenne de rattachement obtenue avec les simulations LES et la modélisation $k - \epsilon$ pour le cas où $Re_H = 39000$	157

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Taches turbulentes à l'intérieur d'une couche limite. Ces taches prennent la forme de tourbillons. Extrait de Lesieur, 1994.	8
Figure 1.2	Évolution de la fonction $y_1(t)$ pour les deux simulations du système non linéaire de Lorenz.	11
Figure 1.3	Spectre d'énergie typique d'un écoulement turbulent. $E(k)$ représente l'énergie de turbulence et k le nombre d'onde. . .	12
Figure 1.4	Différence au niveau des petites structures turbulentes entre deux jets turbulents où $Re_b > Re_a$. Extrait de Tennekes et Lumley, 1972.	14
Figure 1.5	Nombre d'onde effectif k_{eff} en fonction du nombre d'onde k obtenu pour différents ordres de schémas dans l'approximation d'une dérivée première.	26
Figure 1.6	Évolution des structures tourbillonnaires près d'une paroi solide. Extrait de Cousteix, 1989.	30
Figure 2.1	Représentation des grandes échelles résolues et des petites échelles non résolues par le maillage.	32
Figure 2.2	Spectre d'énergie avec plusieurs opérations de filtrage.	38
Figure 2.3	Intervalles de valeurs du nombre d'onde pour lesquels il y a présence d'interactions entre les grandes échelles et les petites. . .	44

Figure 3.1	Les différentes échelles mises en jeu dans le modèle de similitude d'échelles.	54
Figure 4.1	Maillage décalé: composantes de vitesse calculées aux centres des faces et calcul de la pression au centre de la cellule. . . .	71
Figure 4.2	Courbe de stabilité de l'équation de convection-diffusion employant respectivement les schémas d'Adams-Bashforth et de Crank-Nicolson pour les termes de convection et de diffusion. Nombre de diffusion en ordonnée et nombre de convection en abscisse. Extrait de Peyret et Taylor, 1983.	83
Figure 5.1	Évolution de l'erreur exacte en fonction de la taille du maillage pour le cas analytique de Ethier et Steinman, 1994.	89
Figure 5.2	Vecteurs vitesses à $t = 0.1s$ pour le cas analytique de Ethier et Steinman, 1994. Cas où le maillage comporte $20 \times 20 \times 20$ cellules.	90
Figure 5.3	Configuration de la marche d'Armaly <i>et al.</i> , 1983 et des différents paramètres de l'écoulement.	91
Figure 5.4	Comparaison des résultats numériques obtenus avec les mesures expérimentales d'Armaly <i>et al.</i> , 1983: profil de vitesse à différentes positions longitudinales de la marche descendante où $Re = 389$. Maillage utilisé: $80 \times 52 \times 32$ cellules.	93

Figure 5.5	Comparaison des résultats numériques obtenus avec les mesures expérimentales d'Armaly <i>et al.</i> , 1983: longueur de rattachement x_r en fonction du nombre de Reynolds. Maillage de $80 \times 52 \times 32$ cellules pour $Re \leq 389$ et de $160 \times 54 \times 32$ cellules pour $Re > 389$	95
Figure 5.6	Comparaison des résultats numériques obtenus avec les mesures expérimentales d'Armaly <i>et al.</i> , 1983: position marquant le début x_4 et la fin x_5 de la zone de recirculation secondaire en fonction du nombre de Reynolds.	96
Figure 5.7	Isovaleurs de la composante de vitesse axiale u à $Re=800$	96
Figure 6.1	Configuration de la marche d'Eaton, 1980 montrant les différents paramètres de l'écoulement.	99
Figure 6.2	Exemple de maillage employé pour la simulation des grandes échelles au niveau du canal d'expansion de la marche. Maillage 3 du tableau 6.1.	104
Figure 6.3	Évolution temporelle de la composante de vitesse axiale \bar{u} à $x/H = 20$, $y/H = 1$ et $z/H = 4$ obtenue en utilisant l'approche dynamique mixte avec le Maillage 3.	105
Figure 6.4	Courbe illustrant le pourcentage du temps total pour lequel le fluide se trouvant près de la paroi inférieure se dirige dans la direction aval en fonction de la position longitudinale. Cas où $Re_H = 11000$, utilisation de l'ADM avec le Maillage 3.	108

Figure 6.5	Comparaison des résultats numériques obtenus avec l'ADM et les mesures expérimentales Eaton, 1980: profil de la vitesse moyenne $\langle \bar{u} \rangle / U_o$ sur le plan longitudinal central ($z/H = 4$). Cas où $Re_H = 11000$ avec le Maillage 4.	112
Figure 6.6	Champ des vecteurs de la vitesse moyenne sur le plan central $z/H = 4$. Cas où $Re_H = 11000$, utilisation de l'ADM avec le Maillage 4.	113
Figure 6.7	Isovaleurs de la composante de vitesse axiale $\langle \bar{u} \rangle$. Cas où $Re_H = 11000$, utilisation de l'ADM avec le Maillage 4. . . .	114
Figure 6.8	Distribution de la composante de vitesse axiale u^+ aux positions longitudinales $x/H = 8, 12, 16, 20$ et 24 en fonction de la distance verticale y^+ au-dessus de la paroi inférieure. Cas où $Re_H = 11000$, utilisation de l'ADM avec le Maillage 4. . .	114
Figure 6.9	Distribution de l'intensité de turbulence axiale $\langle u'^2 \rangle / U_o^2$ sur le plan longitudinal central ($z/H = 4$). Cas où $Re_H = 11000$, utilisation de l'ADM et de l'ADC avec le Maillage 3.	117
Figure 6.10	Évolution de l'intensité de turbulence axiale $\langle u'^2 \rangle / U_o^2$ selon la direction longitudinale. Cas où $Re_H = 11000$, utilisation de l'ADM et de l'ADC avec le Maillage 3 sur le plan longitudinal central à $y/H = 0.75$	118
Figure 6.11	Distribution de l'intensité de turbulence verticale $\langle v'^2 \rangle / U_o^2$ sur le plan longitudinal central ($z/H = 4$). Cas où $Re_H = 11000$, utilisation de l'ADM et de l'ADC avec le Maillage 3.	119

Figure 6.12	Distribution de l'intensité de turbulence selon l'envergure $\langle w'^2 \rangle / U_o^2$ sur le plan longitudinal central ($z/H = 4$). Cas où $Re_H = 11000$, utilisation de l'ADM et de l'ADC avec le Maillage 3.	120
Figure 6.13	Champ de l'énergie cinétique de turbulence k associée aux grandes échelles. Cas où $Re_H = 11000$, utilisation de l'ADM avec le Maillage 4.	121
Figure 6.14	Analyse de l'effet du maillage: distribution de l'intensité de turbulence axiale $\langle u'^2 \rangle / U_o^2$ avec le Maillage 3 et le Maillage 4. Cas où $Re_H = 11000$, utilisation de l'ADM.	122
Figure 6.15	Analyse de l'effet de l'approche utilisée: distribution de l'intensité de turbulence axiale $\langle u'^2 \rangle / U_o^2$. Cas où $Re_H = 11000$, utilisation de l'ADM et de l'ADC avec le Maillage 4.	123
Figure 6.16	Évolution de l'intensité de turbulence axiale $\langle u'^2 \rangle / U_o^2$ selon la direction longitudinale avec le Maillage 3 et le Maillage 4 sur le plan longitudinal central à $y/H = 0.75$. Cas où $Re_H = 11000$, utilisation l'ADM et l'ADC.	124
Figure 6.17	Distribution de la constante dynamique C aux positions longitudinales $x/H = 2.0, 4.0, 6.0, 8.0$ et 10.0 . Comparaison entre l'ADM et l'ADC avec le Maillage 3 pour le cas où $Re_H = 11000$ à $t = 962H/U_o$	127

- Figure 6.18 Spectre fréquentiel de la composante de fluctuation axiale u'^2 en fonction du nombre de Strouhal St à la position $x/H = 20$, $y/H = 1$ et $z/H = 4$. Période d'observation correspondant à $T_o = 100H/U_o$. Cas où $Re_H = 11000$, utilisation de l'ADM avec Maillage 3. 129
- Figure 6.19 Isovaleurs du coefficient de pression $C_p = (\langle \bar{p} \rangle - p_o) / 0.5\rho U_o^2$ sur le plan longitudinal central. Cas où $Re_H = 11000$, utilisation de l'ADM avec Maillage 3. Agrandissement au niveau de la zone de recirculation. 131
- Figure 6.20 Distribution du coefficient de pression C_p le long de la paroi inférieure sur le plan longitudinal central de la marche. . . . 131
- Figure 6.21 Distribution de l'intensité de turbulence axiale $\langle u'^2 \rangle / U_o^2$: comparaison des résultats de l'approche LES (ADM avec Maillage 4) et de la modélisation $k - \epsilon$. Cas où $Re_H = 11000$. 136
- Figure 6.22 Champ des vecteurs de la vitesse instantanée dans le plan longitudinal central (plan xy à $z/H = 4$) au temps $t = 962H/U_o$. Cas où $Re_H = 11000$, utilisation de l'ADM avec le Maillage 3. Agrandissement de la zone de recirculation. 138
- Figure 6.23 Champ des vecteurs de la vitesse instantanée dans le plan de l'envergure (plan yz) à $x/H = 5$ au temps $t = 962H/U_o$. Cas où $Re_H = 11000$, utilisation de l'ADM avec le Maillage 3. . . . 138

Figure 6.24	Champ instantané de la composante de vitesse \bar{u} dans le plan longitudinal central (plan xy à $z/H = 4$) au temps $t = 962H/U_o$. Cas où $Re_H = 11000$, utilisation de l'ADM avec le Maillage 3.	139
Figure 6.25	Maillage le plus fin employé pour la simulation des grandes échelles au niveau du canal d'expansion de la marche. Maillage 6 du tableau 6.5.	142
Figure 6.26	Courbe illustrant le pourcentage du temps total pour lequel le fluide se trouvant près de la paroi inférieure se dirige dans la direction aval en fonction de la position longitudinale. Cas où $Re_H = 39000$, utilisation de l'ADM avec le Maillage 6. . .	143
Figure 6.27	Comparaison des résultats numériques obtenus avec l'ADM et les mesures expérimentales Eaton, 1980: profil de la vitesse moyenne $\langle \bar{u} \rangle / U_o$ sur le plan longitudinal central ($z/H = 3.45$). Cas où $Re_H = 39000$, utilisation du Maillage 6. . . .	145
Figure 6.28	Champ des vecteurs de la vitesse moyenne sur le plan central ($z/H = 3.45$). Cas où $Re_H = 39000$, utilisation de l'ADM avec le Maillage 6.	146
Figure 6.29	Isovaleurs de la composante de vitesse axiale $\langle \bar{u} \rangle$. Cas où $Re_H = 39000$, utilisation de l'ADM avec le Maillage 6. . . .	146
Figure 6.30	Distribution de la composante de vitesse axiale u^+ aux positions longitudinales $x/H = 15, 20$ et 24 en fonction de la distance verticale y^+ au-dessus de la paroi inférieure. Cas où $Re_H = 39000$, utilisation de l'ADM avec le Maillage 6. . . .	147

- Figure 6.31 Distribution de l'intensité de turbulence axiale $\langle u'^2 \rangle / U_o^2$ sur le plan longitudinal central ($z/H = 3.45$). Cas où $Re_H = 39000$, utilisation de l'ADM et de l'ADC avec le Maillage 6. 149
- Figure 6.32 Évolution de l'intensité de turbulence axiale $\langle u'^2 \rangle / U_o^2$ selon la direction longitudinale. Cas où $Re_H = 39000$, utilisation de l'ADM et de l'ADC avec le Maillage 6 sur le plan longitudinal central à $y/H = 0.75$ 150
- Figure 6.33 Distribution de l'énergie cinétique de turbulence k/U_o^2 sur le plan longitudinal central ($z/H = 3.45$). Cas où $Re_H = 39000$, utilisation de l'ADM et de l'ADC avec le Maillage 6. 151
- Figure 6.34 Distribution du tenseur de Reynolds $-\langle u' v' \rangle / U_o^2$ sur le plan longitudinal central ($z/H = 3.45$). Cas où $Re_H = 39000$, utilisation de l'ADM et de l'ADC avec le Maillage 6. 153
- Figure 6.35 Spectre fréquentiel de la composante de fluctuation axiale u'^2 en fonction du nombre de Strouhal St à la position $x/H = 20$, $y/H = 1$ et $z/H = 3.45$. Période d'observation correspondant à $T_o = 100H/U_o$. Cas où $Re_H = 39000$, utilisation de l'ADM avec Maillage 6. 155
- Figure 6.36 Distribution de l'intensité de turbulence axiale $\langle u'^2 \rangle / U_o^2$: comparaison des résultats de l'approche LES (Maillage 6) et de la modélisation $k - \epsilon$. Cas où $Re_H = 39000$ 158
- Figure 6.37 Distribution du tenseur de Reynolds $-\langle u' v' \rangle / U_o^2$: comparaison des résultats de l'approche LES (Maillage 6) et de la modélisation $k - \epsilon$. Cas où $Re_H = 39000$ 160

- Figure 6.38 Distribution de l'énergie cinétique de turbulence k/U_o^2 : comparaison des résultats de l'approche LES (Maillage 6) et de la modélisation $k - \epsilon$. Cas où $Re_H = 39000$ 161
- Figure 6.39 Champ des vecteurs de la vitesse instantanée dans le plan longitudinal central (plan xy à $z/H = 3.45$) au temps $t = 460H/U_o$. Cas où $Re_H = 39000$, utilisation de l'ADM avec le Maillage 6. Agrandissement de la zone de recirculation. . . 163
- Figure 6.40 Champ des vecteurs de la vitesse instantanée dans le plan de l'envergure (plan yz) à $x/H = 5$ au temps $t = 460H/U_o$. Cas où $Re_H = 39000$, utilisation de l'ADM avec le Maillage 6. . . 163
- Figure 6.41 Champ instantané de la composante de vitesse \bar{u} dans le plan longitudinal central (plan xy à $z/H = 3.45$) au temps $t = 460H/U_o$. Cas où $Re_H = 39000$, utilisation de l'ADM avec le Maillage 6. 164
- Figure 6.42 Isostructure de la pression instantanée $\bar{p} = -0.3 \rho U_o^2$ dans le plan xz (jusqu'à $x/H = 4$) au temps $t = 460H/U_o$. Cas où $Re_H = 39000$, utilisation de l'ADM avec le Maillage 6. Agrandissement de la vue de dessus du canal d'expansion de la marche. 164

LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

ADC	Approche Dynamique Classique
ADI	Alternating Direction Implicit
ADM	Approche Dynamique Mixte
ASL	Advance Scientific Library
ASM	Algebraic Stress Model
CFL	nombre de Courant. Friedrichs et Lewy
CPU	Central Processing Unit
DFMAC	Différences Finies "Marker And Cell"
DNS	Direct Numerical Simulation
FFT	Fast Fourier Transform
ILU	Incomplete LU
LES	Large Eddy Simulation
MAC	Marker And Cell
MIAO	Mathématiques et Ingénierie Assisté par Ordinateur
MILU	Multicolor Incomplete LU
p.d.f	percent downstream flow
RANS	Reynolds Averaged Navier-Stokes
RSM	Reynolds Stress Model
SPLIB	Librairie de méthodes itératives pour matrice creuse

Caractères usuels

A^+	constante empirique ($A^+ = 25$)
C	constante de Smagorinsky au carré ($C = C_s^2$)
C_{ij}	terme croisé
C_{ij}^m	terme croisé modifié
C_K	constante de Kolmogorov ($C_K = 1.4$)
C_p	coefficient de pression
C_s	constante de Smagorinsky
c	nombre de convection ou de Courant
D	terme de dissipation
d	nombre de diffusion
$E(k)$	énergie de l'écoulement turbulent dans l'espace spectral
\vec{e}_i	vecteurs unitaires de l'espace physique
F_2	fonction de structure du second ordre
f	fréquence du signal
$G(x, x')$	fonction filtre de l'espace physique
$\hat{G}(k)$	fonction filtre de l'espace spectral
H	hauteur de la marche descendante
H_i^n	terme de convection et de sous-maille à $t = n$
h	pas de discrétisation
k	énergie cinétique de turbulence ou nombre d'onde
k_c	nombre d'onde de coupure ($k_c = \pi/\Delta$)

k_{eff}	nombre d'onde effectif
L_{ij}	terme de Leonard (champ explicite)
L_{ij}^m	terme de Leonard modifié
l	longueur caractéristique de sous-maille
p	pression
q_{sgs}^2	énergie cinétique de sous-maille
q_{sm}	échelle caractéristique de vitesse de sous-maille
R_{ij}	terme Reynolds
R_{ij}^m	terme Reynolds modifié
Re	nombre de Reynolds
Re_H	nombre de Reynolds basé sur la hauteur de la marche descendante
$ \bar{S} $	norme du tenseur de déformation
S_{ij}	tenseur de déformation
St	nombre de Strouhal
T_{ij}	contraintes de sous-maille au niveau du filtre-test
t	temps
U_c	vitesse de convection
U_o	vitesse de référence à l'entrée de la marche
u^+	vitesse axiale en unité de paroi
u_i	champ de vitesse instantané
u'_i	champ des petites échelles
\hat{u}_i	champ de vitesse intermédiaire
u_i^*	approximation du champ intermédiaire \hat{u}_i

\bar{u}	vitesse axiale des grandes échelles
$\overline{u_i}$	champ filtré de vitesse (grande échelle)
$\overline{\overline{u_i}}$	quantité doublement filtrée relative à l'échelle du maillage
$\widetilde{u_i}$	quantité filtrée relative à l'échelle du filtre-test
\bar{v}	vitesse verticale des grandes échelles
\bar{w}	vitesse dans la direction de l'envergure des grandes échelles
x_r	longueur de rattachement
x_4	position marquant le début de la zone de recirculation secondaire
x_5	position marquant la fin de la zone de recirculation secondaire
y^+	distance verticale en unité de paroi

Caractères grecs

α	rapport entre le filtre-test et le filtre du maillage
Δ ou $\overline{\Delta}$	largeur du filtre (premier niveau de filtrage)
$\widetilde{\Delta}$	largeur du filtre-test
Δt	pas de temps ou discrétisation temporelle
Δx	discrétisation spatiale dans la direction axiale
Δy	discrétisation spatiale dans la direction verticale
Δz	discrétisation spatiale dans la direction de l'envergure
δ_{ij}	delta Kronecker
ϵ	taux de dissipation de l'énergie cinétique de turbulence

ν	viscosité cinématique
ν_t	viscosité turbulente
ξ	variable indépendante spatiale
ρ	densité
τ_{ij}	contraintes de sous-maille au niveau du filtre original
ϕ	variable dépendante ou champ scalaire relié à la pression
ω	pseudo-vorticité ou enstrophie

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE I	FILTRAGE NON UNIFORME UNIDIMENSIONNEL . .	178
I.1	Non-commutativité des opérateurs de filtrage et de dérivation . . .	178
ANNEXE II	QUANTITÉS FILTRÉES AVEC LE MODÈLE	
	DYNAMIQUE	181
II.1	Filtre arithmétique	181
II.2	Volumes de filtrage pour une cellule interne	185
II.3	Volumes de filtrage pour une cellule en contact avec une frontière externe	188

INTRODUCTION

Motivation

La turbulence est un phénomène rencontré dans la vie quotidienne et dans de nombreuses applications industrielles. Il s'agit en effet pour s'en convaincre d'observer les fascinantes volutes d'une cigarette, les tourbillons d'eau qui s'écoulent en aval du pilier d'un pont, la formation d'une dépression cyclonique à la surface de la Terre, les tourbillons en épingle à cheveux d'une couche limite sur une aile d'avion, les structures tourbillonnaires du mélange air-carburant dans un moteur d'automobile. Ces quelques exemples illustrent admirablement l'omniprésence des écoulements turbulents. Une prédiction et un contrôle adéquats de la turbulence permettent aux ingénieurs de limiter par exemple la traînée sur les corps aérodynamiques ou d'augmenter l'efficacité de combustion dans les moteurs. La modification de la forme et de l'organisation des structures tourbillonnaires au sein d'un écoulement turbulent constitue un défi scientifique se traduisant par de substantiels gains énergétiques engendrant des effets bénéfiques tant du point de vue économique qu'écologique. Or, ce n'est que depuis quelques années, grâce à la capacité grandissante des outils informatiques qu'il est possible pour les communautés scientifique et industrielle d'utiliser des logiciels numériques permettant de simuler des écoulements turbulents. Contrairement aux essais expérimentaux, les simulations numériques permettent d'étudier une vaste gamme de paramètres dans une période de temps relativement courte et ce, à un coût considérablement moindre. Dans le domaine de la mécanique des fluides, l'analyse de la turbulence constitue cependant un problème d'envergure encore peu maîtrisé. Jusqu'à ce jour, il n'existe pas de théorie capable de prédire tous les phénomènes turbulents présents dans l'univers. La complexité de la turbulence réside dans le fait qu'elle est un phénomène tridi-

mensionnel, aléatoire et imprévisible.

Il existe trois grandes approches de résolution numérique des écoulements turbulents. Il s'agit de la modélisation statistique de type $k - \epsilon$ ¹, de la simulation directe et de la simulation des grandes échelles. La première approche consiste à représenter le mouvement moyen de l'écoulement en effectuant une moyenne temporelle de l'équation de Navier-Stokes. Pour contrer le problème de fermeture des équations moyennées, le modèle de fermeture $k - \epsilon$ est très souvent employé. Ce modèle connaît du succès dans plusieurs problèmes industriels bien contrôlés. Il présente cependant de sérieuses lacunes lorsque les écoulements turbulents sont complexes. Il faut de plus considérer que la modélisation statistique ne donne accès qu'aux valeurs moyennes alors que certains problèmes d'ingénieries nécessitent la connaissance des valeurs maximales instantanées ou des fréquences caractéristiques de l'écoulement instationnaire.

La deuxième approche, soit la simulation directe, consiste à résoudre explicitement les équations de Navier-Stokes afin de capter toutes les échelles tourbillonnaires présentes dans un écoulement turbulent jusqu'aux échelles de dissipation. Considérée comme une méthode très attrayante puisqu'aucune modélisation n'est nécessaire, cette dernière s'avère cependant inapplicable pour des situations industrielles étant donné l'énorme capacité informatique requise pour effectuer ces calculs.

La troisième approche, soit la simulation des grandes échelles est une technique qui simule directement les grandes structures instationnaires de l'écoulement jusqu'à une certaine échelle et qui modélise l'action des petites structures (échelles de sous-maille). Cette méthode est très intéressante puisque l'on peut effectuer des simulations à moindre coût par rapport aux simulations directes tout en conservant le

¹La modélisation de type $k - \epsilon$ prend ici un sens large car on englobe dans cette catégorie les modèles $k - \omega$, *ASM* (Algebraic Stress Model) et *RSM* (Reynolds Stress Model).

caractère instationnaire de la turbulence.

Au sein du groupe MIAO (Mathématiques et Ingénierie Assisté par Ordinateur) de l'École Polytechnique de Montréal et du CERCA (Centre de recherche en calcul appliqué), la simulation des grandes échelles appliquée à des écoulements turbulents complexes est une première. Ce projet vise à maîtriser et à explorer les fondements de cette technique et à en évaluer le niveau de faisabilité pour une application pratique de nature industrielle.

Objet de la thèse

Jusqu'à présent, le groupe de recherche MIAO de l'École Polytechnique de Montréal et du CERCA utilise une modélisation statistique de type $k - \epsilon$ pour la résolution numérique d'écoulements turbulents. Cette modélisation repose sur certaines hypothèses simplificatrices qui rendent ce modèle inadéquat lorsque l'écoulement comporte notamment une ou plusieurs zones de recirculation, phénomène complexe présent dans la majorité des écoulements turbulents rencontrés en industrie. On se propose donc dans ce travail, de simuler la turbulence se développant derrière une marche descendante par la méthode de simulation des grandes échelles en considérant un régime d'écoulement incompressible. Les résultats des simulations numériques pour des nombres de Reynolds de 11000 et 39000 seront confrontés aux mesures expérimentales relevées par Eaton, 1980. Les différents paramètres étudiés lors des simulations seront principalement la longueur moyenne de rattachement, les profils moyens de vitesse, les distributions des composantes de l'intensité de turbulence et la fréquence caractéristique des structures cohérentes de l'écoulement. Ces calculs numériques permettront d'évaluer le potentiel de la simulation des grandes échelles à prédire adéquatement le comportement d'écoulements turbulents com-

plexes. Nous analyserons également l'efficacité de différents modèles de sous-maille afin d'identifier les modèles les plus aptes à représenter adéquatement la physique de sous-maille. Nous tenterons de plus de déterminer s'il est possible, sans recourir à une loi de paroi, d'utiliser la simulation des grandes échelles pour résoudre un écoulement turbulent comportant un nombre de Reynolds relativement élevé soit 39000. En effet, les simulations des grandes échelles répertoriées dans la littérature et concernant l'écoulement derrière une marche comportent toutes un nombre de Reynolds inférieur à 10000. La comparaison des résultats obtenus par la simulation des grandes échelles avec ceux issus du modèle $k - \epsilon$ constitue un autre aspect important de cette étude.

En résumé, les cinq objectifs principaux de cette thèse sont donc les suivants:

- Maîtriser et explorer les fondements de la méthode de simulation des grandes échelles;
- Évaluer la faisabilité et le potentiel de cette méthode à prédire adéquatement un écoulement turbulent de nature industrielle tel que celui qui se développe derrière une marche descendante;
- Comparer les différents modèles de sous-maille rencontrés dans la littérature;
- Utiliser la simulation des grandes échelles pour un écoulement comportant un nombre de Reynolds élevé;
- Comparer les prédictions obtenues par la simulation des grandes échelles avec celles de la modélisation $k - \epsilon$.

L'atteinte des objectifs de cette étude a nécessité le développement d'un code numérique de différences finies résolvant les équations de Navier-Stokes d'un écoulement tridimensionnel, incompressible et instationnaire. ce code comporte aussi une partie importante dédiée à la modélisation de sous-maille. Le code doit concilier rapidité

de calcul et précision afin de représenter efficacement et adéquatement les grandes échelles tourbillonnaires présentes dans un écoulement turbulent. De plus, la mémoire requise lors des calculs numériques ne doit pas être exorbitante; le choix de la méthode numérique doit tenir compte de cette importante considération lors des simulations tridimensionnelles de la turbulence. Le développement du code de calcul doit également être bien structuré afin de permettre à d'éventuels utilisateurs d'implanter facilement d'autres aspects importants de la mécanique des fluides tels les effets de compressibilité et de combustion.

Cette thèse débute par un chapitre destiné à présenter qualitativement le phénomène de la turbulence en suscitant l'intérêt du lecteur non familier avec le domaine. Il comporte une revue bibliographique détaillée portant sur la modélisation et la simulation de la turbulence qui nous amène à présenter les trois grandes approches utilisées pour la représentation d'écoulements turbulents en insistant particulièrement sur les différents aspects de l'approche de simulation des grandes échelles. Le deuxième chapitre décrit l'importante notion de filtrage qui permet de faire la distinction entre les grandes et les petites échelles. Dans son ensemble, ce deuxième chapitre expose donc les grands principes généraux de la méthode de simulation des grandes échelles. Les détails théoriques des différents modèles de sous-maille utilisés sont quant à eux présentés au troisième chapitre. Le quatrième chapitre expose formellement la méthode numérique implantée dans le code de calcul DF-MAC. Le cinquième chapitre s'attarde aux aspects de vérification et de validation du code de calcul, ce qui constitue une étape cruciale avant de passer à la simulation proprement dite de la turbulence. Enfin, le dernier chapitre de cette thèse présente en première partie les résultats numériques de l'écoulement tridimensionnel se développant derrière la marche d'Eaton, 1980 avec un nombre de Reynolds de 11000 alors que la deuxième partie est consacrée à la résolution de l'écoulement correspondant à un nombre de Reynolds de 39000.

CHAPITRE 1

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

La turbulence a suscité l'intérêt de beaucoup de chercheurs et continue toujours de captiver les scientifiques en grand nombre. La présence d'écoulements turbulents dans un grand nombre de phénomènes physiques explique en grande partie cet intérêt porté à la turbulence. C'est donc un domaine de la mécanique des fluides qui a fait l'objet de nombreux ouvrages et articles qui étudient de façon générale ou qui traitent plus spécifiquement de la modélisation et de la simulation du phénomène. La turbulence est très bien décrite dans divers documents fondamentaux tels Batchelor, 1953, Tennekes et Lumley, 1972, Favre *et al.*, 1976, Cousteix, 1989, Lesieur, 1990, Schiestel, 1993 et Lesieur, 1994.

Ce chapitre introduit la turbulence de manière qualitative permettant ainsi au lecteur non familier avec le domaine d'acquérir une bonne vue d'ensemble de ce phénomène. Les trois grandes approches utilisées pour représenter les écoulements turbulents, la modélisation statistique, la simulation directe et la simulation des grandes échelles sont également présentées. La simulation des grandes échelles sera plus amplement traitée car il s'agit de l'approche utilisée dans le cadre de ce travail. On retrouve bon nombre d'articles et de rapports portant sur différents aspects de la simulation des grandes échelles tels Reynolds, 1976, Rogallo et Moin, 1984, Piomelli, 1994, Ferziger, 1995, Lesieur et Métais, 1996 et plus récemment Piomelli, 1998 et Ghosal, 1998.

1.1 Introduction à la turbulence

Il est impossible d'exprimer une définition véritablement formelle de la turbulence étant donné la complexité du phénomène. Évidemment, chacun de nous la conçoit de façon intuitive en employant des termes vagues tels que phénomène désordonné, aléatoire ou chaotique. Il est par contre possible de dégager certaines propriétés observables qui caractérisent tous les écoulements turbulents. Ces propriétés sont les suivantes (Cousteix, 1989):

Nombre de Reynolds élevé:

En laboratoire, on peut facilement observer qu'à mesure que le nombre de Reynolds augmente, un écoulement laminaire quelconque passe à un état turbulent: le champ de vitesse est alors caractérisé par l'apparition de tourbillons instationnaires. L'amplification des petites perturbations existant à la frontière d'entrée de l'écoulement et de celles qui sont dues à la rugosité des parois solides est responsable de la naissance de ces tourbillons. Cette amplification, causée par la non-linéarité de la loi régissant l'écoulement des fluides, l'équation de Navier-Stokes, est d'autant plus importante que le nombre de Reynolds est élevé. Tel que mentionné par Gleick, 1991: "En dynamique des fluides, tout se ramène à une seule équation canonique, l'équation de Navier-Stokes, un miracle de concision qui met en relation la vitesse du fluide, sa pression, sa densité et sa viscosité, mais qui s'avère non linéaire. Il faut donc s'attendre à de sérieuses difficultés mathématiques. Si l'équation de Navier-Stokes ne contenait pas ce démon de la non-linéarité, le monde ne serait pas ce qu'il est et la science n'aurait pas besoin du chaos."

L'équation d'Orr-Sommerfeld permet de prédire théoriquement la stabilité ou l'instabilité d'un écoulement pour un certain nombre de Reynolds et pour une certaine perturbation donnée: elle montre en effet que l'écoulement devient instable lorsque

le nombre de Reynolds atteint une certaine valeur critique. Au-delà de cette valeur, les forces d'inertie (termes non linéaires de l'équation de Navier-Stokes) sont dominantes par rapport aux forces visqueuses qui ne sont plus suffisamment importantes pour amortir les perturbations. C'est sous l'effet d'interactions complexes entre les composantes non linéaires d'inertie et celles de la viscosité du fluide que des instabilités prenant la forme de tourbillons instationnaires sont engendrées dans l'écoulement. La figure 1.1 illustre ce type de tourbillons apparaissant à l'intérieur d'une couche limite turbulente. Ces tourbillons sont transportés par l'écoulement et "contaminent" en quelque sorte l'ensemble de celui-ci. L'écoulement devient alors globalement turbulent.

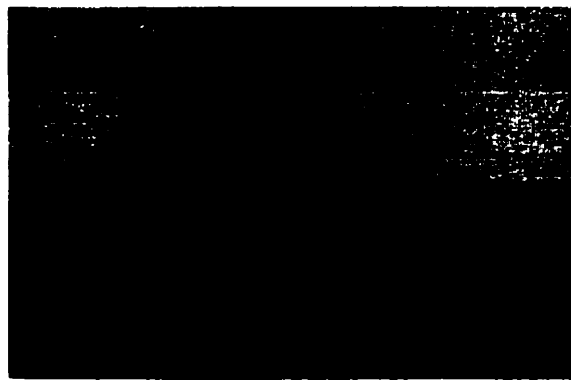


Figure 1.1 Taches turbulentes à l'intérieur d'une couche limite. Ces taches prennent la forme de tourbillons. Extrait de Lesieur, 1994.

Caractère irrégulier:

Lors de l'observation temporelle d'un point quelconque dans un écoulement turbulent, une oscillation aléatoire du signal de la vitesse sera immanquablement notée. Ce caractère oscillatoire indique que l'écoulement est fortement instationnaire et donc que l'hypothèse d'un écoulement permanent n'est plus valide pour simuler la turbulence. Pour traiter un tel signal, on emploie très souvent des méthodes statistiques.

Tridimensionnalité:

Sous l'effet de mécanismes d'étirement et de gauchissement, les structures tourbillonnaires présentes dans un écoulement turbulent sont fortement tridimensionnelles. Ceci donne lieu à un champ de vorticité fluctuant de façon très intense dans les trois directions de l'espace. La vorticit ¹ est une quantité importante car comme le souligne Lesieur, 1994: "La vorticité est le germe de la turbulence". En effet, lorsqu'un écoulement uniforme, qui est donc dépourvu de vorticité, entre en contact avec une paroi solide, cette dernière freine l'écoulement, ce qui engendre des gradients de vitesse² importants au voisinage de la paroi et résulte en un champ de vorticité qui est propice à déclencher et à entretenir la turbulence.

Capacité de mélange:

Les écoulements turbulents sont caractérisés par des variations importantes du champ de vitesse assurant ainsi un mélange du fluide beaucoup plus intense et plus efficace que celui qu'il est possible d'obtenir pour les écoulements laminaires. La turbulence agit donc positivement sur l'efficacité de combustion d'un moteur puisque sa grande capacité de brassage favorise un bon mélange entre le carburant et le comburant.

Dissipation de l'énergie:

Par un mécanisme de cascade, auquel nous reviendrons plus loin, l'énergie cinétique des grandes structures turbulentes est acheminée vers les petites structures, lieu de la dissipation de l'énergie cinétique en chaleur. Cette propagation de l'énergie résulte de l'interaction d'effets non linéaires et de la tridimensionnalité du phénomène de turbulence.

¹La vorticité est définie comme étant la moitié du rotationnel du vecteur vitesse en point donné.

²On peut démontrer que les gradients de vitesse moyenne sont responsables de la production de la turbulence.

Imprévisibilité:

Les systèmes turbulents sont imprévisibles en ce sens qu'ils sont très sensibles aux conditions initiales. Ainsi, pour une géométrie donnée, si l'on effectue deux simulations numériques dont les vitesses initiales en un point donné ne diffèrent que d'une petite quantité au démarrage, les deux champs de vitesse instantanée seront totalement décorrélés au bout d'un certain temps et cela, où que ce soit dans l'écoulement. Ce phénomène s'explique par le fait que la faible différence de vitesse à l'état initial s'accroît grandement au cours du temps sous l'action d'interactions non linéaires entre les tourbillons turbulents.

La solution du système non linéaire de Lorenz constitue un exemple très probant de ce caractère d'imprévisibilité. Ce système très simple est destiné à effectuer des prévisions météorologiques à l'aide de trois variables dépendantes: $y_1(t)$, $y_2(t)$ et $y_3(t)$. Les conditions initiales de la première simulation numérique du système de Lorenz sont les suivantes $y_1(t = 0) = 1.0$, $y_2(t = 0) = 0$ et $y_3(t = 0) = 0$ alors qu'elles sont $y_1(t = 0) = 1.000001$, $y_2(t = 0) = 0$ et $y_3(t = 0) = 0$ pour la seconde. La figure 1.2 montre clairement que les deux solutions numériques obtenues pour $y_1(t)$ sont totalement décorrélées à partir de $t = 37s$. Cette décorrélation existe également pour les variables dépendantes y_2 et y_3 . On conclut ainsi qu'une petite perturbation initiale engendre de grandes différences au bout d'un certain temps. Ce sont les interactions non linéaires du système de Lorenz qui sont responsables de l'amplification de l'infime différence entre les conditions initiales imposées à $y_1(t)$. En météorologie, cette amplification est souvent désignée par "l'effet papillon" selon lequel le simple battement d'aile d'un papillon est susceptible d'affecter le climat de toute la planète.

Cet exemple d'imprévisibilité montre bien qu'étant donné que la turbulence est régie elle aussi par des équations non linéaires, nous serons confrontés dans son étude au même phénomène de sensibilité des conditions initiales que le système de Lorenz. Cette conclusion s'applique aussi aux conditions frontières.

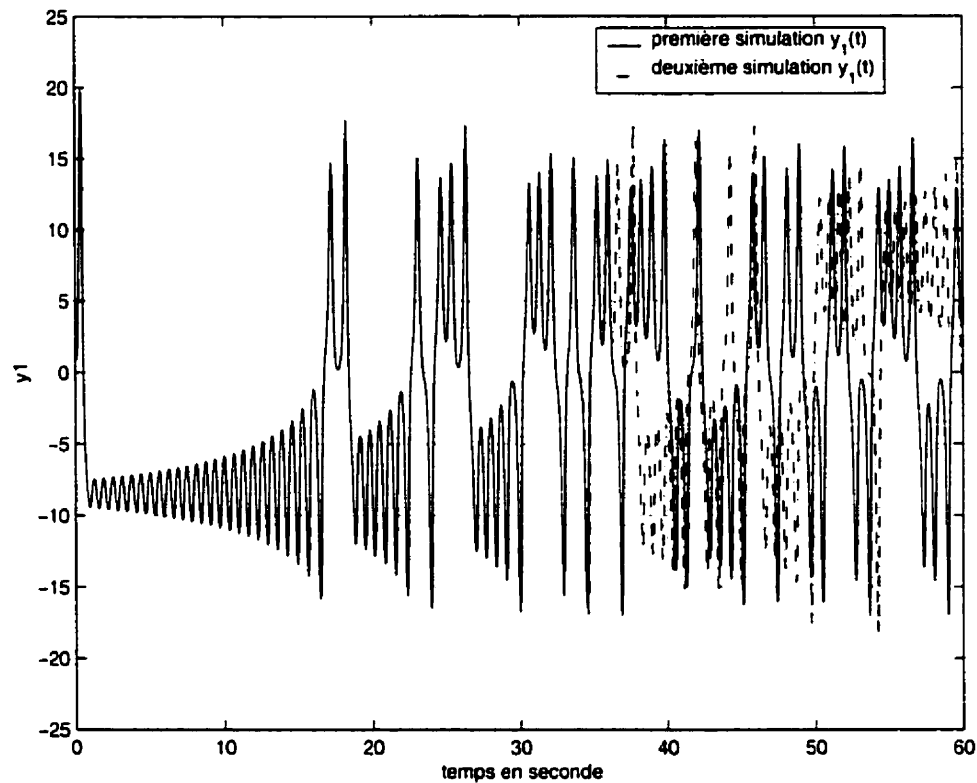


Figure 1.2 Évolution de la fonction $y_1(t)$ pour les deux simulations du système non linéaire de Lorenz.

Intrinsèque à l'écoulement:

Il est important de comprendre que la turbulence n'est pas une propriété du fluide mais bien une propriété de l'écoulement. Ceci rend l'étude du phénomène de la turbulence spécifique au cas traité.

1.2 Théorie de Kolmogorov: cascade d'énergie

La manifestation de la turbulence correspond à l'excitation d'une grande plage d'échelles tourbillonnaires (ou composantes de fréquences) du signal de vitesse de l'écoulement. Ce large spectre d'échelles est constitué de grands tourbillons, imposés par la géométrie de l'écoulement, et de plus petits tourbillons dont la taille est déterminée par la viscosité du fluide. La coexistence de tourbillons de différentes échelles peut être comprise par l'analyse du concept de cascade d'énergie de Kolmogoroff 1941 qui fait appel à l'analyse spectrale des écoulements turbulents. La figure 1.3 schématise un spectre d'énergie typique en fonction du nombre d'onde. Le nombre d'onde est inversement proportionnel à une longueur caractéris-

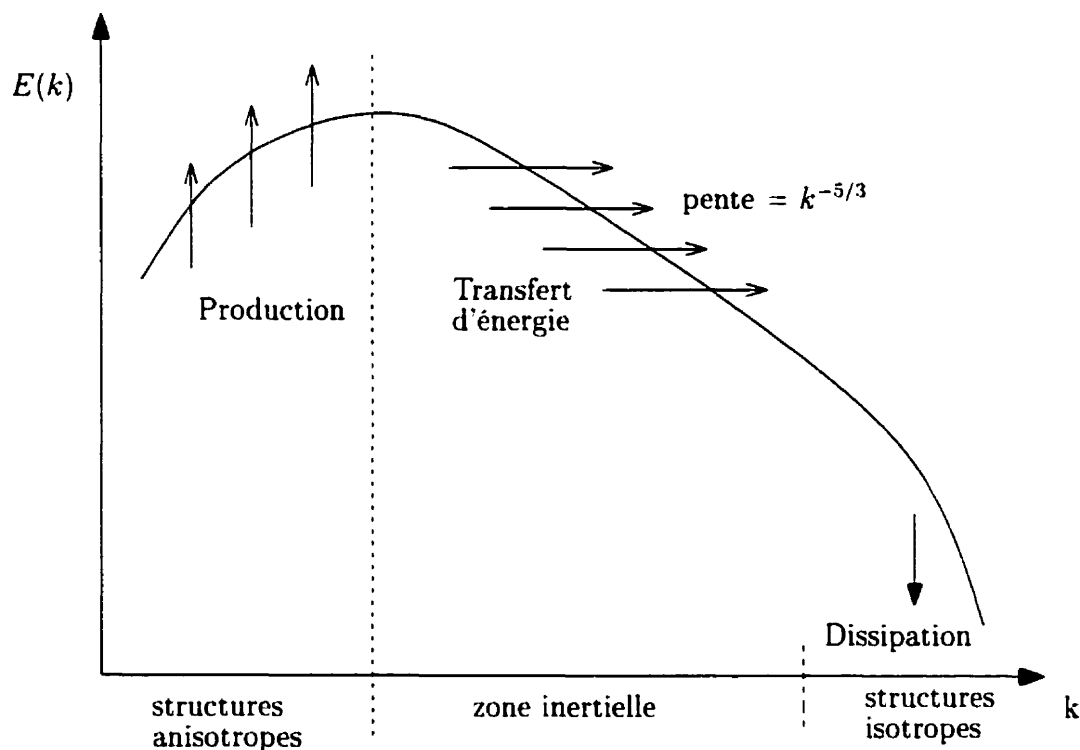


Figure 1.3 Spectre d'énergie typique d'un écoulement turbulent. $E(k)$ représente l'énergie de turbulence et k le nombre d'onde.

tique correspondant à la taille des tourbillons et est directement proportionnel à la fréquence. L'analyse spectrale d'un écoulement turbulent indique que l'énergie est répartie sur une plage de fréquences très étendue. Les tourbillons de grande échelle sont ceux qui transportent l'énergie et qui, par un phénomène d'étirement des filets tourbillonnaires, génèrent des mouvements de plus petite échelle. À l'intérieur de ces derniers se forment des mouvements d'échelle encore plus petite. La tridimensionnalité de l'écoulement et la non-linéarité des équations du mouvement sont responsables de la formation des tourbillons de plus petite échelle dont la taille minimale est bornée par une limite liée à la viscosité du fluide. En effet, au fur et à mesure que la taille des tourbillons diminue, le nombre de Reynolds associé à ceux-ci diminue aussi. Lorsqu'il devient assez faible, la viscosité dissipe l'énergie cinétique du fluide en chaleur. Ce transfert d'énergie des grandes structures vers les petites est désigné par l'expression *cascade d'énergie* et caractérisé par la zone inertielle du spectre d'énergie. La taille des petites structures est limitée par le fait que le taux de dissipation d'énergie de ces dernières ne peut être supérieur au taux de transfert de l'énergie des grandes structures aux petites. On constate donc que la formation des petites structures tourbillonnaires est liée à la capacité de l'écoulement de pouvoir dissiper l'énergie par l'intermédiaire de la viscosité. La figure 1.4 illustre à cet effet deux jets turbulents: le nombre de Reynolds général de l'écoulement de la situation (b) est supérieur à celui de la situation (a). Son énergie intrinsèque étant plus élevée, il comporte des petites structures plus petites et plus nombreuses que celles de la situation (a) assurant ainsi la dissipation de l'énergie supplémentaire qu'il possède par rapport à celle-ci.

Le mécanisme de cascade d'énergie a été découvert bien avant Kolmogorov par Richardson en 1922 qui l'a décrit sous la forme d'un sonnet (Lesieur, 1994):

*Les gros tourbillons ont de petits tourbillons,
 Qui se nourrissent de leur vitesse,
 Et les petits tourbillons en ont de plus petits,
 Et c'est ainsi jusqu'à la viscosité.*

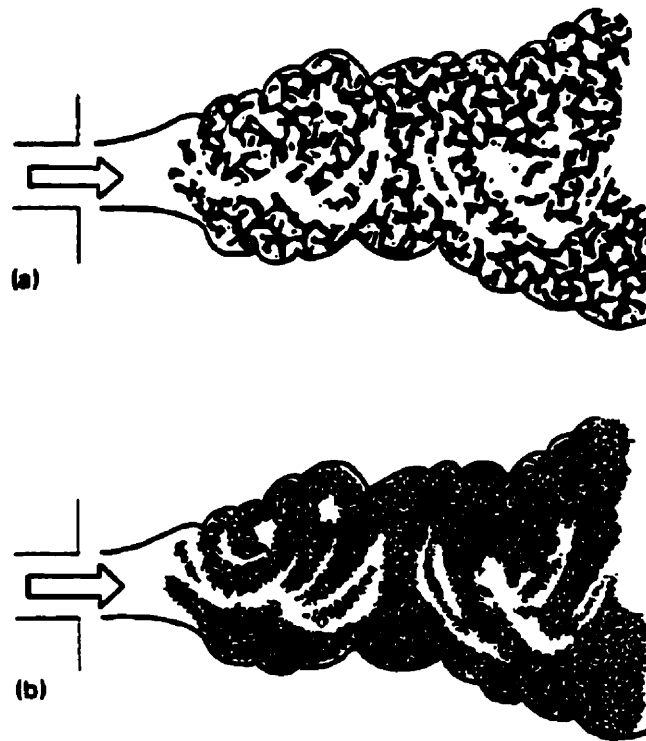


Figure 1.4 Différence au niveau des petites structures turbulentes entre deux jets turbulents où $Re_b > Re_a$. Extrait de Tennekes et Lumley. 1972.

1.3 Modélisation et simulation de la turbulence

Dans cette section, on abordera de façon descriptive les trois grandes approches présentées dans la littérature pour représenter les écoulements turbulents. Il s'agit de la modélisation statistique des équations de Navier-Stokes, de la simulation di-

recte et de la simulation des grandes échelles. Avant de poursuivre, il est bon de clarifier ici qu'il existe une différence fondamentale entre la modélisation et la simulation de la turbulence. En effet, la modélisation consiste à effectuer un traitement statistique sur toutes les équations de conservation³ et à les résoudre numériquement pour prédire les différents champs moyens présents dans l'écoulement. Inversement, la simulation de la turbulence résout numériquement et explicitement toutes les équations de base et traite statistiquement les banques de données des différents champs instantanés ainsi engendrés.

1.3.1 Modélisation statistique (RANS)

Ce type de modélisation consiste à prédire statistiquement les caractéristiques de la turbulence sans résoudre de façon explicite le champ instantané de vitesse des équations de Navier-Stokes. Cette approche, conçue par Reynolds, 1895, consiste en effet à décomposer une grandeur turbulente en une partie moyenne et en une partie fluctuante. L'application d'un opérateur de moyennage sur les équations de Navier-Stokes génère l'équation moyennée dite de Reynolds. Cette dernière décrit le mouvement moyen d'un écoulement turbulent et est couramment appelée RANS pour "Reynolds Averaged Navier-Stokes". La non-linéarité des équations de Navier-Stokes fait en sorte que des termes moyennés de produits de fluctuation de vitesse apparaissent dans l'équation moyennée de Reynolds; on les nomme *contraintes turbulentes de Reynolds* par lesquelles se manifeste l'interaction entre le mouvement moyen et le mouvement fluctuant.

Les contraintes turbulentes de Reynolds doivent être modélisées en fonction des inconnues principales du problème afin de pouvoir fermer le système d'équations.

³Il s'agit des équations régissant les principes de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie.

Pour ce faire, plusieurs modèles ont été développés. Parmi ceux-ci, on retrouve le modèle à longueur de mélange, les modèles à 2 équations ($k - \epsilon$ et $k - \omega$), le modèle algébrique "Algebraic Stress Model" (ASM) et le modèle avec fermeture au second ordre "Reynolds Stress Model" (RSM). Tous ces modèles comportent des constantes de fermeture qui sont déterminées expérimentalement pour des écoulements simples. Lorsqu'ils sont appliqués à des cas très différents de ceux qui ont été utilisés lors de la calibration, on doit souvent modifier les constantes de fermeture pour espérer obtenir des résultats numériques acceptables, ce qui nécessite habituellement la connaissance à priori des résultats approximatifs. Le manque de généralité de ces modèles, dû au fait qu'ils ne sont pas aptes à représenter la large gamme d'échelles de tourbillons présents dans un écoulement turbulent, les restreint donc à un certain nombre d'applications simples.

Le modèle le plus populaire utilisé pour représenter les contraintes turbulentes de Reynolds, est celui du type $k - \epsilon$ basé sur le concept de viscosité turbulente. Il a été développé au début des années soixante-dix par Launder et Spalding, 1972 à partir des travaux de Harlow et Nakayama, 1967. Ce modèle exprime la viscosité turbulente de l'écoulement en fonction de l'énergie cinétique turbulente k et de son taux de dissipation ϵ . Pour ce faire, on doit faire appel à la loi de Kolmogorov qui suppose qu'il y a isotropie locale de la turbulence. Pour des applications industrielles bien contrôlées, ce modèle offre de bons résultats et ne requiert pas de grandes ressources informatiques. Par contre, il comporte des lacunes majeures lorsqu'il est appliqué à des écoulements où l'hypothèse d'isotropie ne peut être posée. En effet, le modèle $k - \epsilon$ ne représente pas de façon adéquate les phénomènes de recirculation, de stratification, de compressibilité ou de rotation du fluide. Mentionnons en terminant qu'une excellente revue de tous les modèles statistiques est présentée dans Cousteix, 1989, Schiestel, 1993 et Wilcox, 1993.

1.3.2 Simulation directe (DNS)

Dans le domaine de la turbulence, la simulation directe est souvent désignée sous l'appellation DNS pour "Direct Numerical Simulation". Cette approche consiste à simuler directement les équations de Navier-Stokes afin de capter toutes les échelles présentes dans un écoulement turbulent, depuis les plus grandes imposées par la géométrie du problème jusqu'aux plus petites échelles dont la taille est régie par la viscosité du fluide. Puisqu'aucune modélisation n'est effectuée, on résout donc explicitement les différents champs instantanés présents dans l'écoulement en considérant bien entendu que la taille de la plus petite structure tourbillonnaire est de plusieurs ordres de grandeur supérieure à l'échelle moléculaire (Lesieur, 1994), ce qui assure la validité de l'équation de Navier-Stokes. Cette méthode semble très attrayante mais en réalité, elle est difficilement applicable à des situations industrielles à cause de l'énorme capacité informatique qu'elle requiert. En effet, on peut montrer que le rapport de longueur caractéristique des tourbillons de grande échelle à celle des tourbillons de petite échelle de dissipation est proportionnel au nombre de Reynolds par $Re^{3/4}$ (Ferziger, 1995), ce qui implique que pour une direction donnée de l'espace, le nombre de points de discrétisation nécessaires est de l'ordre de $Re^{3/4}$. Pour une simulation tridimensionnelle, le nombre total de points est alors approximativement de l'ordre de $Re^{9/4}$. En sachant qu'il est pratique courante de rencontrer en industrie des écoulements possédant un nombre de Reynolds de 10^6 (Lesieur, 1994), il faudrait ainsi, pour pouvoir utiliser adéquatement l'approche DNS, environ 30000 milliards de points de discrétisation⁴! Pour les ressources informatiques disponibles aujourd'hui, il est clair qu'il est impossible d'envisager cette approche pour résoudre des situations industrielles. Actuellement, la simulation directe n'est employée que pour des écoulements très simples comportant

⁴On considère qu'il s'agit de la simulation de la turbulence derrière un avion. La longueur caractéristique est de 10 m alors que la vitesse est de l'ordre de 1.5 m/s.

des nombres de Reynolds de l'ordre de quelques milliers et sert surtout à mieux comprendre les mécanismes fondamentaux de la turbulence.

1.3.3 Simulation des grandes échelles (LES)

La simulation des grandes échelles est souvent désignée par LES pour "Large Eddy Simulation". Cette technique constitue en fait un intermédiaire entre l'approche statistique (RANS) et la simulation directe (DNS). En effet, les grosses structures anisotropes qui dépendent de la géométrie de l'écoulement sont simulées directement (DNS) alors que les petites échelles, beaucoup plus universelles et isotropes, sont modélisées (RANS). En d'autres mots, les grandes échelles qui transportent la masse, la quantité de mouvement et l'énergie doivent être représentées de façon explicite sans recourir à aucun modèle alors que les petites structures tourbillonnaires, présentant un caractère universel d'un écoulement à l'autre, se prêtent bien à la modélisation. Puisque, l'approche LES ne décrit pas les petites échelles de façon directe, le nombre de points de discrétisation est nécessairement moindre que lors d'une simulation entièrement effectuée par la méthode DNS. La méthode LES est ainsi plus économique.

De plus, la partie modélisation de cette technique ne représente qu'une petite fraction de l'énergie totale de l'écoulement soit de l'ordre de 15% selon Piomelli *et al.*, 1997. Dans l'approche RANS, la modélisation est effectuée pour l'écoulement moyen qui constitue la grande partie de l'énergie totale. Ainsi, la modélisation de l'approche RANS est beaucoup plus critique que celle de l'approche LES (Ferziger, 1995).

Un des points cruciaux de cette approche consiste à distinguer les grandes échelles des petites en utilisant une notion importante qui est celle du filtrage (Leonard,

1974). On choisit une largeur de filtre, $\bar{\Delta}$, permettant de regrouper toutes les structures dont la taille est supérieure à $\bar{\Delta}$ comme étant les tourbillons de grandes échelles, et toutes les structures plus petites comme étant les tourbillons de petites échelles. Par la suite, il suffit de filtrer l'équation de Navier-Stokes pour connaître l'évolution spatiale et temporelle des grandes échelles. À cause de la présence des termes non linéaires, cette opération de filtrage engendre des inconnues appelées contraintes de sous-maille qui représentent l'interaction entre les grandes et les petites échelles et qui permet à l'énergie des grandes structures de se propager vers les petites par le mécanisme de cascade d'énergie.

La simulation des grandes échelles (LES) sera utilisée dans ce travail puisque cette approche constitue certainement le meilleur compromis entre une modélisation statistique (RANS) et une simulation directe (DNS). Cette approche sera bien entendu abordée avec beaucoup plus de détails dans les prochains chapitres. Les sections suivantes du présent chapitre sont dédiées à la revue des différents modèles de sous-maille et des différentes méthodes numériques couramment employés dans le domaine de la simulation des grandes échelles.

1.4 Modèles de sous-maille utilisés dans la simulation des grandes échelles

La simulation des grandes échelles requiert la modélisation des contraintes de sous-maille, générées par la non-linéarité des équations de Navier-Stokes, et qui représentent l'interaction entre les grandes et les petites échelles. Selon Piomelli, 1998, il est essentiel qu'un modèle de sous-maille présente les caractéristiques suivantes:

- Forte dépendance aux petites échelles résolues;
- Aucune contribution des termes de sous-maille pour un écoulement laminaire;

- Prédiction correcte du transfert d'énergie locale entre les grandes échelles et les petites;
- Prédiction adéquate de la dissipation de l'énergie par les petites échelles.

Une analyse de l'équation de transport de l'énergie des grandes échelles et de celle des petites échelles montre les différents mécanismes d'échange d'énergie (Gonze, 1994 et Piomelli, 1998). Ces échanges d'énergie se font principalement des grandes structures vers les petites par cascade d'énergie quoiqu'il soit également possible pour certaines situations que le phénomène inverse se produise, ce que l'on nomme rétrodiffusion (Weill, 1997) ou "backscatter" en anglais (Ferziger, 1995).

1.4.1 Modèle de Smagorinsky et l'approche dynamique classique

Le modèle de sous-maille le plus utilisé est celui du météorologue Smagorinsky, 1963 qui proposa de représenter les effets de sous-maille par une hypothèse de viscosité turbulente. Cette viscosité est liée à une constante nommée constante de Smagorinsky qui doit être déterminée spécifiquement pour chaque écoulement analysé. Lilly, 1967 a déterminé une valeur égale à 0.16 pour un écoulement turbulent isotrope. Le modèle de Smagorinsky est employé encore à ce jour étant donné sa simplicité de mise en oeuvre. Il a été utilisé par Deardoff, 1970 pour la toute première simulation LES appliquée à un canal turbulent dans un contexte industriel. En général, le modèle de Smagorinsky donne de bons résultats pour des écoulements turbulents relativement simples mais il présente des lacunes sérieuses pour la simulation d'écoulements en régime de transition puisqu'il est trop dissipatif (Piomelli *et al.*, 1990). De plus, il s'avère inapte à bien représenter le comportement des structures tourbillonnaires près d'une paroi solide. Pour corriger cette situation,

plusieurs chercheurs ont recours à l'expression empirique de Van Driest, 1956 pour amortir la valeur de la constante de Smagorinsky près des parois. Moin et Kim, 1982 ont mis en oeuvre une version améliorée du modèle de Smagorinsky traitant l'inhomogénéité de l'écoulement près des parois solides pour un canal turbulent.

L'approche dynamique classique a été développée par Germano *et al.*, 1991 afin de calculer localement la constante de Smagorinsky puisque celle-ci varie en fonction de l'endroit où l'on se situe dans l'écoulement⁵. On obtient alors un comportement adéquat de la viscosité turbulente près des parois solides de même qu'une représentation plus fidèle de l'échange d'énergie des grandes échelles vers les petites ou l'inverse (Ferziger, 1995). Pour des raisons de stabilité numérique, il est nécessaire d'effectuer une opération de moyennage de la constante dans une direction homogène de l'écoulement. Ghosal *et al.*, 1995 ont développé une formulation variationnelle qui permet d'utiliser l'approche dynamique même lorsque l'écoulement étudié ne comporte aucune direction homogène. Cette solution s'avère cependant très coûteuse en temps de calcul.

1.4.2 Modèle de similitude d'échelles et l'approche dynamique mixte

Le modèle de similitude d'échelles a été conçu lors des travaux de Bardina *et al.*, 1980 et de Bardina *et al.*, 1983. Ce modèle utilise le concept de similarité d'échelles qui repose sur le fait que la majorité des interactions entre les grandes et petites échelles se produit près de la zone de coupure du spectre d'énergie. Les termes de sous-maille doivent donc se comporter de façon similaire à celle des petites échelles résolues. Contrairement au modèle de Smagorinsky, l'hypothèse de viscosité turbulente ne rentre pas en jeu car on modélise directement les contraintes de sous-maille

⁵Lilly, 1992 a démontré que l'expression de la constante déterminée par Germano *et al.*, 1991 peut également être obtenue en utilisant la méthode des moindres carrés.

par le champ de vitesse filtré. De plus, il offre la possibilité d'être anisotrope et de transférer l'énergie dans les deux sens, soit des grandes structures vers les petites ou l'inverse. Il possède cependant, contrairement au modèle de Smagorinsky, l'inconvénient de ne pas être assez dissipatif. C'est la raison pour laquelle on combine souvent le modèle de similitude d'échelles avec un modèle dissipatif comme celui de Smagorinsky pour ainsi former le modèle mixte (Gonze, 1994 et Ferziger, 1995).

L'approche dynamique mixte, développée par Zang *et al.*, 1993, utilise quant à elle le modèle mixte comme modèle de base. Cette approche comporte plusieurs avantages comparativement à l'approche dynamique classique. En effet, la portion de l'écoulement qui est modélisée s'avère beaucoup moins importante et les résultats obtenus sont plus stables puisque la constante de Smagorinsky ainsi calculée comporte moins de variations. Zang *et al.*, 1993 ont ainsi démontré que leur approche représente plus fidèlement les différentes caractéristiques de la turbulence que l'approche dynamique classique. L'approche dynamique mixte a également été utilisée avec succès dans les simulations des grandes échelles de Calmet et Magnaudet, 1997 et tout récemment de Péneau, 1999. Cette approche reste cependant très peu employée dans le domaine des simulations des grandes échelles.

1.4.3 Modèle de fonction de structure

Un autre modèle de sous-maille suscitant un certain intérêt est celui de la fonction de structure développé à l'institut de mécanique de Grenoble par Métais et Lesieur, 1992. Ce modèle suppose que la viscosité turbulente est fonction de l'échelle de longueur des fluctuations de sous-maille et de la vitesse caractéristique de ces fluctuations qui représente la dispersion des petites échelles autour de chaque point de grille. Les différents paramètres de ce modèle sont déterminés en supposant que la

loi de Kolmogorov s'applique aux structures de sous-maille ainsi qu'en utilisant des notions de fermeture des méthodes spectrales (Lesieur, 1994). Il existe également deux versions plus élaborées de ce modèle de fonction de structure. Tout d'abord, celui conçu par David, 1993 et désigné par modèle de fonction de structure sélective qui permet de conserver la viscosité turbulente de sous-maille uniquement si l'écoulement est suffisamment tridimensionnel. Le modèle développé par Ducros, 1995 fait quant à lui appel à la fonction de structure filtrée qui permet de mieux capter la transition d'une couche limite vers la turbulence.

1.4.4 Autres modèles de sous-maille

Il existe également un modèle de sous-maille où l'on doit résoudre l'équation de transport de l'énergie cinétique de sous-maille (Davidson, 1997). Les valeurs d'énergie obtenues sont ensuite utilisées pour évaluer les contraintes de sous-maille en chaque point. D'après Fureby, 1998, cette méthode est coûteuse et n'est pas universelle car on doit aussi évaluer certaines constantes qui dépendent du problème étudié. Ce qui entre en contradiction avec la philosophie du LES qui vise en effet à ce que la partie modélisation de l'écoulement soit la plus universelle possible.

Il existe d'autres modèles de sous-maille très complexes qui requièrent un temps de calcul (CPU) supérieur à ceux présentés dans cette section. Selon Piomelli, 1998, il faut éviter que les modèles de sous-maille n'augmentent indûment le temps de calcul. En effet, la simulation des grandes échelles nécessite déjà un temps de calcul et des ressources informatiques considérables sans que les modèles de sous-maille ne viennent alourdir de façon significative l'approche LES. On normalise généralement le temps de calcul requis pour un modèle de sous-maille quelconque par rapport à celui qui est requis lors de l'utilisation du modèle de Smagorinsky puisque ce modèle est celui qui requiert le moins de temps de calcul lors d'une simulation des

grandes échelles. Le modèle en question devient inacceptable lorsqu'il nécessite un temps de calcul supérieur de 30% à celui du modèle de Smagorinsky.

1.5 Méthodes numériques

Les équations filtrées de Navier-Stokes utilisées pour représenter les grandes échelles et le modèle de sous-maille utilisé pour représenter les petites échelles peuvent être discrétisées par différentes techniques (Fureby, 1998): méthode spectrale, différences finies, éléments finis et volumes finis. Le schéma numérique appliqué aux équations discrétisées doit pouvoir fournir des résultats représentant de façon précise l'ensemble des échelles de longueur et de temps présentes dans un écoulement turbulent (Ferziger, 1995). Une excellente description des différentes méthodes numériques est présentée dans les ouvrages de Ferziger et Peric, 1996, de Hoffmann et Chiang, 1993, de Hoffman, 1992 et de Fletcher, 1991.

1.5.1 Discrétisation temporelle et spatiale

Typiquement, on utilise des schémas d'intégration dans le temps tels que ceux de Runge-Kutta, Adams-Bashforth, Crank-Nicolson et le schéma saute-mouton ou "leapfrog" (Ferziger, 1995). Puisqu'ils sont non linéaires, la discrétisation des termes de convection est effectuée explicitement alors que les termes linéaires de diffusion sont discrétisés implicitement.

Le schéma centré est utilisé pour la discrétisation spatiale des différentes dérivées. On évite en effet le schéma de type différentiation amont souvent nommé "upwinding", surtout celui du premier ordre puisqu'il est réputé introduire de la viscosité artificielle et affecte par conséquent, sérieusement la dynamique entre les grandes

et petites structures (Rogallo et Moin, 1984, Ferziger, 1995 et Piomelli, 1998)⁶. Tel que mentionné plus haut, un schéma numérique doit absolument être en mesure de bien représenter la large gamme d'échelles présente dans un écoulement turbulent. Pour évaluer l'erreur commise par l'utilisation d'un certain schéma numérique, il ne suffit pas de n'en considérer que l'ordre; il est préférable de vérifier aussi son habileté à bien capter les différentes échelles par une analyse de Fourier de la dérivée première pour un seul mode du champ de vitesse (Piomelli, 1994). Pour illustrer notre propos, considérons par exemple que le champ de vitesse est proportionnel à e^{ikx} où k est le nombre d'onde. Or, la dérivée exacte par rapport à la variable x de ce mode est ike^{ikx} alors qu'une approximation de cette dérivée première par un schéma numérique donne plutôt $ik_{eff}e^{ikx}$. Par exemple, prenons le cas où l'on emploie un schéma centré d'ordre deux pour évaluer la dérivée première du champ de vitesse. On peut alors exprimer cette dernière de la manière suivante:

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} \quad (1.1)$$

Il s'agit par la suite de remplacer u par e^{ikx} dans la relation (1.1):

$$\begin{aligned} \frac{\delta u}{\delta x} &= \frac{e^{ik(x+\Delta x)} - e^{ik(x-\Delta x)}}{2\Delta x} \\ \frac{\delta u}{\delta x} &= \frac{e^{ikx}(e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x})}{2\Delta x} * \frac{i}{i} \\ \frac{\delta u}{\delta x} &= i \underbrace{\frac{\sin(k\Delta x)}{\Delta x}}_{k_{eff}} e^{ikx} \end{aligned} \quad (1.2)$$

⁶L'ouvrage de Roache, 1995 critique sévèrement ce type de schéma en affirmant: "The good news about first-order upstream differencing is that it always gives you an answer. The bad news is that it always gives you the same answer, no matter what the Reynolds numbers".

L'utilisation de ce schéma centré pour l'approximation de la dérivée première génère donc un nombre effectif k_{eff} qui reflète la capacité du schéma numérique à représenter le nombre d'onde k . La figure 1.5 présente le comportement de plusieurs schémas centrés. Plus l'ordre du schéma de discrétisation croît, plus on est en mesure de capter précisément la large gamme d'échelles de longueurs⁷ présentes dans un écoulement turbulent. Comme nous venons de le montrer pour la dérivée première, il est également possible d'évaluer le nombre d'onde effectif associé à la discrétisation de la dérivée seconde. Cet exercice montrerait, pour un schéma de même type et de même ordre, que le nombre d'onde effectif k_{eff} associé à la dérivée deuxième représente plus adéquatement le nombre d'onde k que celui associé à la dérivée première. Ceci implique donc que l'approximation numérique de la dérivée première comporte une erreur plus significative que l'erreur commise pour la dérivée deuxième.

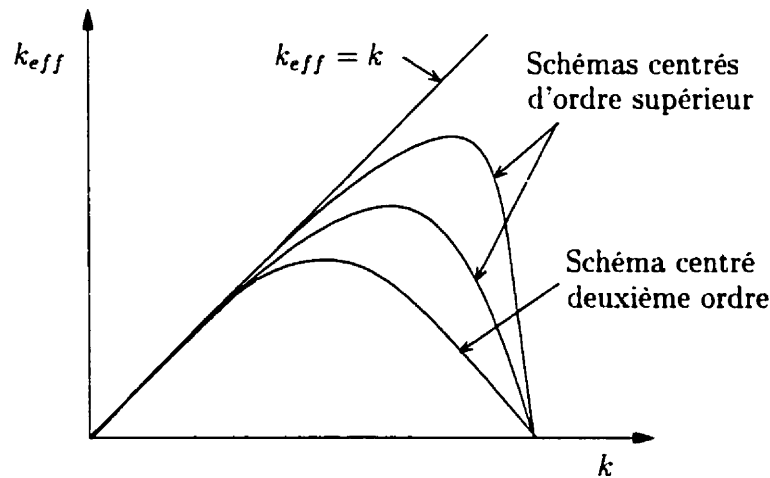


Figure 1.5 Nombre d'onde effectif k_{eff} en fonction du nombre d'onde k obtenu pour différents ordres de schémas dans l'approximation d'une dérivée première.

Jusqu'ici, notre analyse n'a fait intervenir que la notion de nombre d'onde effec-

⁷On rappelle que le nombre d'onde est inversement proportionnel à une échelle de longueur.

tif qui est certes un paramètre très important pour les simulations LES et DNS. Ferziger, 1995 va plus loin en évaluant l'erreur permettant de mesurer le potentiel du schéma numérique à représenter adéquatement l'ensemble des structures tourbillonnaires de la façon suivante:

$$Erreur = \frac{\int (k - k_{eff}) E(k) dk}{\int k E(k) dk} \quad (1.3)$$

On peut montrer de cette façon que les méthodes spectrales sont très précises puisque $k_{eff} = k$ et qu'elles sont souvent utilisées pour des simulations LES lorsque l'écoulement considéré le permet. En effet, les méthodes spectrales sont convenables uniquement pour des géométries simples et pour des conditions frontières spécifiques. En pratique, ces méthodes ne sont jamais employées pour des problèmes d'ingénierie.

1.5.2 Conditions initiales et frontières

Une des difficultés rencontrées lors de la simulation d'un écoulement turbulent avec la méthode LES ou encore avec la méthode DNS est celle de l'établissement des conditions initiales et frontières. En effet, étant donné le caractère imprévisible de la turbulence, les écoulements turbulents sont très sensibles à ces conditions. D'après Ferziger, 1995, celles-ci peuvent être "mémorisées" par l'écoulement et en affecter la physique pour un laps de temps considérable avant que leur impact ne se soit atténué. Les simulations numériques devraient idéalement utiliser exactement les mêmes conditions initiales et frontières que l'expérience. En pratique, il est cependant impossible de connaître tous les détails des conditions expérimentales et il faut donc imposer artificiellement ces dernières. On construit typiquement les

conditions initiales en superposant un bruit aléatoire possédant un certain spectre d'énergie approprié à un champ moyen de vitesse pouvant être laminaire ou turbulent (Piomelli, 1994 et Ferziger, 1995). Plusieurs pas de temps sont requis avant que le champ de vitesse obtenu ne soit réaliste.

Quant aux conditions frontières d'entrée, les valeurs les plus appropriées à fixer peuvent être issues des résultats numériques obtenus pour d'autres cas tests semblables (Ferziger, 1995). Une autre méthode consiste à superposer des fluctuations aléatoires sur un champ moyen comme nous l'avons décrit ci-haut pour les conditions initiales. Quant à la technique de Lund *et al.*, 1996, elle estime le champ d'entrée d'un écoulement selon la solution obtenue à une certaine position donnée près de la sortie. En d'autres termes, on extrait le champ de vitesse pour un plan donné, on effectue une mise à l'échelle en accord avec la géométrie de la frontière d'entrée, puis on utilise finalement ce résultat comme condition frontière d'entrée.

Pour des écoulements permanents, une condition de Neumann nulle est spécifiée pour les frontières de sortie. Cette condition impose par exemple que la dérivée d'un champ de vitesse soit nulle dans la direction normale à la frontière. D'après Ferziger, 1995, il est cependant préférable d'utiliser, pour des écoulements instationnaires dont font partie les écoulements turbulents, une condition de sortie convective de la forme suivante:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + U \frac{\partial \phi}{\partial \xi} = 0 \quad (1.4)$$

où ϕ est le champ de vitesse choisi et U la vitesse convective de l'écoulement.

Aux parois solides, le choix le plus naturel consiste à spécifier la condition de non-glissement ($u_i = 0$). Près de celles-ci, les structures turbulentes sont petites.

anisotropes et cruciales à capter à cause des gradients de vitesse intenses se trouvant dans cette région. La dynamique de ces structures tourbillonnaires est composée des phases d'éjection, d'éclatement et de balayage. La figure 1.6 illustre les différents mécanismes qui sont responsables de la production de la turbulence près de la paroi: un tourbillon dont l'axe est orienté dans la direction de l'envergure (direction z) est tout d'abord déformé par de faibles perturbations initiales. Il est ensuite étiré dans la direction longitudinale (direction x) par le gradient de vitesse existant dans la direction verticale (direction y) pour former un tourbillon en épingle à cheveux. Par la suite, la tête de ce tourbillon s'élève (phase d'éjection) tout en continuant à s'étirer longitudinalement jusqu'à la phase d'éclatement. Celle-ci est caractérisée par une production intense de turbulence. Puis, survient la phase de balayage correspondant à l'écoulement du fluide à relativement haute vitesse qui tombe vers la paroi pour ensuite balayer cette dernière. Les mécanismes d'éjection, d'éclatement et de balayage sont très importants à capter lors de simulations de la turbulence et nécessitent donc une discrétisation très fine dans le voisinage des parois solides. Typiquement, il faut positionner le premier point du maillage à une distance inférieure à $y^+ \approx 2$ comme le font Avva et Sundaram, 1998 pour le cas d'un canal plan, Oefelein, 1997 pour l'écoulement d'une couche de mélange confiné et Ghosal *et al.*, 1995 pour l'écoulement d'une marche descendante. La dynamique des tourbillons près des parois est très bien décrite dans l'ouvrage de Cousteix, 1989 et dans l'article de Robinson, 1991.

D'un point de vue pratique, il peut être possible de réduire la capacité informatique requise pour une simulation des grandes échelles en employant des modèles de loi de paroi qui permet de diminuer significativement le nombre de points de discrétisation. Cette loi spécifie la relation entre la contrainte de cisaillement à la paroi qui n'est pas calculée directement et la vitesse de l'écoulement à une certaine distance de celle-ci (zone logarithmique). Une revue complète des différents modèles de loi

de paroi employés pour des simulations LES est présentée par Piomelli *et al.*, 1989. Les travaux de Deardoff, 1970, Schumann, 1975, Mason et Callen, 1986, Piomelli *et al.*, 1989, Cabot, 1995, Cabot, 1996, Balaras *et al.*, 1996, Cabot, 1997 et Baggett, 1997 ont contribué au perfectionnement de la modélisation du comportement de l'écoulement près des parois solides. Tous ces modèles ont été développés pour des situations où le gradient de pression adverse est relativement faible et où les parois solides sont planes et lisses. Selon Piomelli, 1998, toutes ces modélisations reposent sur l'hypothèse qu'il existe une très faible interaction entre la région de paroi et la région du fluide se trouvant au coeur de l'écoulement. Mentionnons pour terminer que l'utilisation des modèles de loi de paroi va à l'encontre de la philosophie de la méthode LES puisque cette dernière nécessite la simulation explicite des tourbillons énergétiques qui déferlent près des parois solides et qui entretiennent le phénomène de la turbulence.

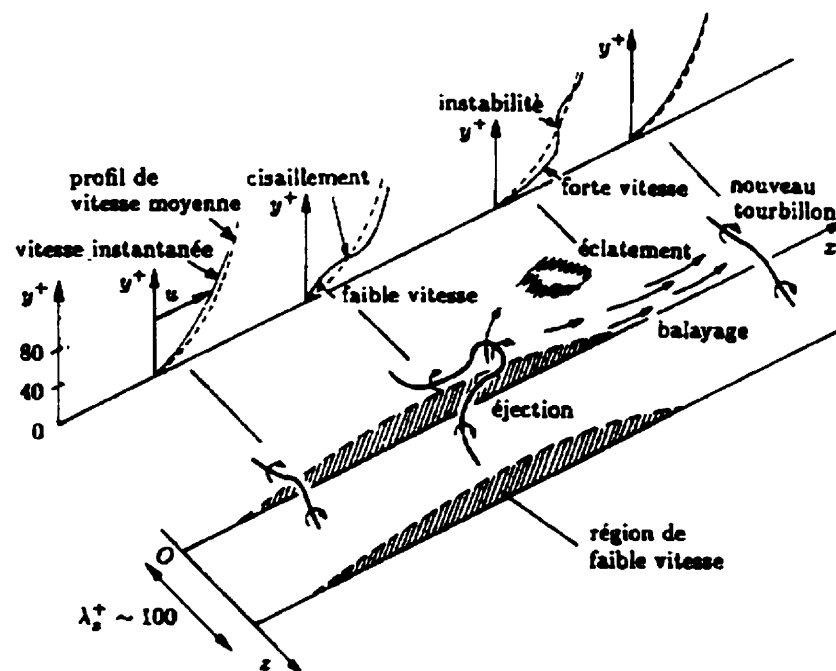


Figure 1.6 Évolution des structures tourbillonnaires près d'une paroi solide. Extrait de Cousteix, 1989.

CHAPITRE 2

SIMULATION DES GRANDES ÉCHELLES

2.1 Introduction

Comme nous l'avons montré au chapitre 1, un écoulement turbulent est un système possédant une vaste gamme d'échelles de longueur et de temps. L'analyse d'un spectre d'énergie permet en effet de constater cette réalité pour tous les écoulements turbulents. La simulation numérique de la turbulence doit donc pouvoir capter toutes les échelles mises en jeu. Cependant, la limitation de la puissance des calculateurs ne permet pas de représenter toutes ces échelles. C'est face à ce constat que la méthode de simulation des grandes échelles a vu le jour. Cette méthode simule directement les grandes échelles turbulentes alors que les petites structures sont modélisées. En d'autres termes, l'approche de simulation des grandes échelles consiste à décomposer le spectre d'énergie d'un écoulement turbulent en deux principales parties: la première est celle des grandes échelles dont on simule l'évolution spatiale et temporelle avec les équations de Navier-Stokes filtrées alors que la deuxième partie est constituée des petites échelles. Ces petites échelles représentent en fait la partie du spectre d'énergie non résolue par le maillage et nécessite donc une modélisation appropriée pour tenir compte de son influence sur les structures de grandes échelles.

Le présent chapitre décrit la notion de filtrage permettant de distinguer les grandes échelles tourbillonnaires des petites. Comme nous pouvons le présager, la distinction entre les grandes et les petites échelles est directement liée à la taille du maillage utilisé lors des simulations. Schématiquement, la figure 2.1 illustre cette distinc-

tion pour un maillage donné. Nous constatons que les petites échelles non résolues

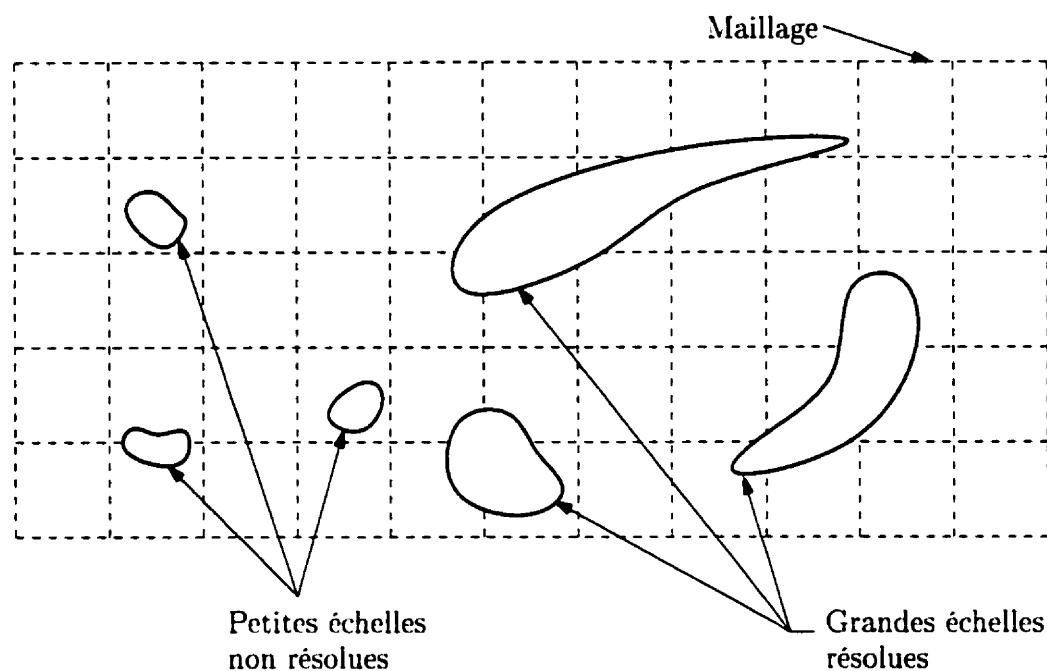


Figure 2.1 Représentation des grandes échelles résolues et des petites échelles non résolues par le maillage.

représentent des structures tourbillonnaires dont la taille est inférieure à celle du pas de discrétisation du maillage alors que la taille des tourbillons des grandes échelles, est supérieure à celle d'une cellule du maillage; ces structures peuvent donc être résolues numériquement. Ce chapitre présente également l'équation de la quantité de mouvement des grandes échelles que l'on nomme l'équation de Navier-Stokes filtrée. On conclura ce chapitre en soulignant les caractéristiques de modélisation requises pour représenter adéquatement les petites échelles non résolues.

2.2 Notion de filtrage

Le raisonnement qui est à l'origine de la méthode de simulation des grandes échelles, consistant à capter les grandes échelles et à modéliser les petites est le suivant: les

grandes structures tourbillonnaires sont celles qui contiennent le plus d'énergie et sont donc celles qui sont responsables du transport de la majorité des champs présents à l'intérieur d'un écoulement. Ces structures sont très différentes d'un écoulement à l'autre car elles sont dépendantes de la géométrie étudiée. Par contre, les petites structures sont beaucoup plus universelles et donc plus faciles à modéliser. Le problème de départ est de distinguer les grandes échelles des petites. Pour ce faire, on introduit la notion de filtrage. Ainsi, si l'on considère le champ turbulent u_i , on définit le champ filtré $\overline{u_i}$ comme étant:

$$\overline{u_i}(x) = \int_D G(x, x') u_i(x') dx' \quad (2.1)$$

où D est le domaine d'application et $G(x, x')$ est la fonction filtre. Le champ filtré $\overline{u_i}$ représente le champ des grandes échelles¹. C'est donc la fonction filtre $G(x, x')$ qui détermine la portion des fluctuations de l'écoulement observé qui est contenue à l'intérieur des grandes échelles. On remarque que l'intégrale (2.1) est un produit de convolution consistant à sélectionner un certain contenu fréquentiel du champ u_i . Concrètement, celui-ci élimine les composantes de hautes fréquences du champ de vitesse, opération sans laquelle un maillage extrêmement fin devrait être utilisé pour capter ces hautes fréquences. Comme le fait remarquer Lesieur, 1994: *"L'action de ce filtre génère un écoulement fictif qui est presque identique à l'écoulement réel dans les grandes échelles supérieures à Δx , mais ne possède pas de fluctuations dans les échelles inférieures"*.

Il est important de réaliser que la discrétisation même des équations de Navier-Stokes correspond à effectuer un filtrage implicite. Pour illustrer ce fait, reprenons

¹Il est à remarquer que la barre au-dessus de u_i ne représente pas ici une moyenne au sens de Reynolds comme lorsque l'on utilise l'approche statistique RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes) mais désigne plutôt le fait que le champ a été filtré par un produit de convolution.

l'exemple donné par Rogallo et Moin, 1984. Imaginons un instant que l'on veuille évaluer la dérivée première d'une fonction continue $u(x)$ à l'aide d'un schéma centré de second ordre². On constate que cette évaluation consiste à calculer la dérivée exacte d'une seconde fonction continue qui est la moyenne de la première. Mathématiquement, cette proposition s'écrit comme suit:

$$\frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} u(\xi) d\xi \right] \quad (2.2)$$

L'expression (2.2) illustre donc que la discrétisation utilisée en calcul numérique élimine toutes les échelles inférieures au pas de discrétisation h . Autrement dit, la discrétisation des équations engendre implicitement un système d'équations filtrées. Grâce à l'exemple que nous venons d'illustrer, on constate que la notion de filtrage est intrinsèquement liée à la méthode de discrétisation utilisée. Dans la prochaine section, nous examinerons plus clairement cette constatation.

2.3 Les filtres

Cette section présente les filtres les plus utilisés dans le domaine des simulations des grandes échelles. Il s'agit du filtre passe-bas ou "Fourier cutoff", du filtre gaussien et du filtre boîte.

²Le schéma centré est souvent employé avec la méthode des différences finies.

Filtre passe-bas ou "Fourier cutoff"

Le filtre de Fourier est simplement défini dans l'espace spectral par

$$\hat{G}(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \leq k_c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\hat{G}(k)$ est la transformée de Fourier de la fonction filtre $G(x, x')$ et où k et k_c représentent respectivement le nombre d'onde et le nombre d'onde de coupure. Le nombre d'onde de coupure est défini de la façon suivante:

$$k_c = \frac{\pi}{\Delta} \quad (2.3)$$

où Δ est la largeur du filtre. Le filtre de Fourier élimine donc le contenu fréquentiel de l'écoulement dont les nombres d'onde sont supérieurs au nombre d'onde de coupure k_c . Il est important de souligner que le nombre d'onde est proportionnel à une fréquence et inversement proportionnel à une échelle de longueur. Le filtre de Fourier présente cependant l'inconvénient d'être une fonction oscillatoire dans l'espace physique (Schiestel, 1993). C'est pour cette raison que ce filtre est employé avec les méthodes spectrales.

Filtre gaussien

Le filtre gaussien est défini dans l'espace physique comme suit:

$$G(x) = \sqrt{\frac{6}{\pi \Delta^2}} e^{-\left(\frac{6x^2}{\Delta^2}\right)} \quad (2.4)$$

Ce filtre possède l'avantage d'être une fonction lisse et inclut une faible portion des

petites échelles à l'intérieur du champ filtré. De plus, il est facilement utilisable autant dans l'espace physique que dans l'espace spectral puisque dans les domaines physique et spectral la fonction filtre s'exprime par une fonction normale.

Filtre boîte ou "box filter"

D'utilisation très simple, ce filtre fut employé lors de l'une des premières simulations LES par Deardoff, 1970. Il consiste tout simplement à effectuer une moyenne à l'intérieur du volume d'une cellule du maillage dans l'espace physique. Plus spécifiquement, l'application de ce filtre au champ turbulent u_i résulte en l'obtention de la quantité filtrée $\overline{u_i}$ définie comme suit:

$$\overline{u_i}(x) = \frac{1}{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3} \int_{x_3 - \Delta x_3/2}^{x_3 + \Delta x_3/2} \int_{x_2 - \Delta x_2/2}^{x_2 + \Delta x_2/2} \int_{x_1 - \Delta x_1/2}^{x_1 + \Delta x_1/2} u_i \, dx_1 dx_2 dx_3 \quad (2.5)$$

où Δx_1 , Δx_2 et Δx_3 définissent les côtés du volume de discrétisation. Ce type de filtrage capte donc uniquement les échelles plus grandes que la taille du volume considéré. Le filtre boîte représente donc précisément le filtrage implicite des équations effectué par le schéma de discrétisation. On considère donc que c'est ce filtre qui est utilisé lorsqu'on emploie les méthodes de discrétisation de différences finies, d'éléments finis ou de volumes finis. Précisons qu'alors que le filtre de Fourier représente une fonction oscillatoire dans l'espace physique, le filtre boîte représente quant à lui une fonction oscillatoire dans l'espace spectral.

2.4 Propriétés des filtres

Étant donné que nous décomposons le champ instantané u_i d'un écoulement turbulent en une partie filtrée dite à grande échelle et en une composante correspondant

aux petites échelles dites de sous-maille, le champ instantané u_i peut donc s'écrire:

$$u_i = \overline{u_i} + u'_i \quad (2.6)$$

où $u_i \rightarrow$ grandeur instantanée du champ

$\overline{u_i} \rightarrow$ partie filtrée du champ (grandes échelles)

$u'_i \rightarrow$ partie du champ à petites échelles

Les propriétés d'un filtre sont différentes de celles d'une moyenne de Reynolds. En effet, contrairement à celle-ci, une opération de filtrage satisfait aux règles suivantes:

$$\overline{\overline{u_i}} \neq \overline{u_i} \quad (2.7)$$

$$\overline{u'_i} \neq 0 \quad (2.8)$$

Les grandes structures non captées sont définies par $\overline{u'_i}$ et s'expriment de la façon suivante:

$$\overline{u'_i} = \overline{u_i} - \overline{\overline{u_i}} \quad (2.9)$$

Graphiquement, la relation (2.7) peut s'illustrer en examinant le spectre d'énergie d'une quantité turbulente u_i tel que montré à la figure 2.2 (Piomelli, 1994). Cette figure présente les courbes du spectre d'énergie associées au champ instantané u_i , au champ filtré $\overline{u_i}$ et au champ doublement filtré $\overline{\overline{u_i}}$. Plus le champ u_i est filtré et plus le signal correspondant à ce dernier est atténué: les différents termes présents

dans la série de Fourier constituant le signal à filtrer sont donc diminués à chaque opération de filtrage³.

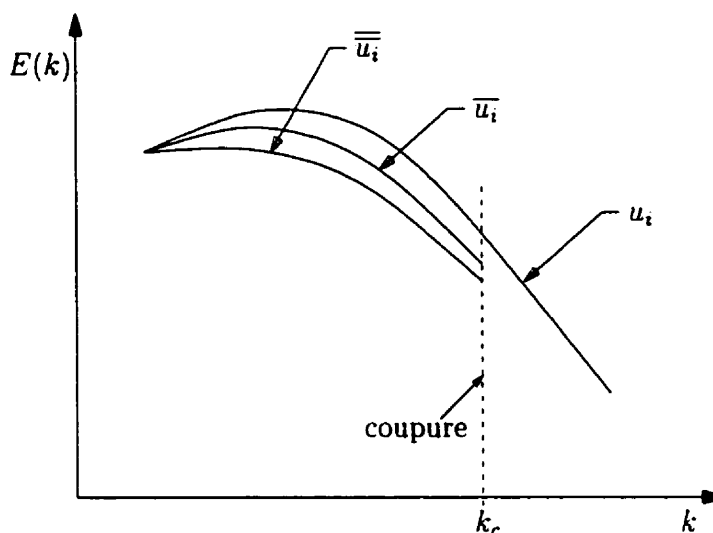


Figure 2.2 Spectre d'énergie avec plusieurs opérations de filtrage.

2.5 Équations de Navier-Stokes filtrées

Par l'utilisation de la simulation des grandes échelles, on vise à connaître l'évolution des grandes structures responsables du transport de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Pour ce faire, il s'agit de filtrer les différentes équations de conservation⁴ régissant l'écoulement d'un fluide. Dans le cadre de ce projet, on considère que le fluide est de type newtonien, incompressible et isotherme. En effectuant une opération de filtrage sur l'équation de continuité et sur l'équation de

³Cette atténuation n'est pas présente pour le filtre de Fourier.

⁴Ces équations sont celles de la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie.

Navier-Stokes du mouvement instantané, on obtient les équations filtrées suivantes:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.10)$$

$$\underbrace{\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}}_{\text{terme temporel}} + \underbrace{\frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j}}_{\text{terme de convection}} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}}_{\text{gradient de pression}} - \underbrace{\nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)}_{\text{terme de diffusion}} = 0 \quad (2.11)$$

où ρ représente la densité du fluide, ν est la viscosité cinématique et où \bar{p} correspond à la pression. En examinant l'équation (2.11), on observe que l'inconnue principale du problème est \bar{u}_i soit le champ de vitesse des grandes échelles et que pour résoudre l'équation, on doit exprimer le terme de convection en fonction de l'inconnue principale. Pour ce faire, on substitue la relation (2.6) dans le produit filtré des vitesses instantanées, $\overline{u_i u_j}$. Après quelques manipulations, on obtient l'équation de Navier-Stokes filtrée:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.12)$$

où τ_{ij} représente le tenseur des contraintes de sous-maille qui s'exprime de la manière suivante:

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j + \overline{u_i u'_j} + \overline{u_j u'_i} + \overline{u'_i u'_j} \quad (2.13)$$

On peut aussi exprimer l'équation (2.13) sous une forme simplifiée:

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j} \quad (2.14)$$

Les interactions entre les grandes et petites échelles se font par l'intermédiaire des contraintes de sous-maille τ_{ij} . Ce tenseur de sous-maille apparaît lors du filtrage des termes de convection non linéaires. Les contraintes de sous-maille sont inconnues dans l'équation du mouvement (2.12) et nécessitent donc une modélisation. Au chapitre 3, on présentera différents modèles de sous-maille permettant de représenter les interactions entre les grandes et les petites échelles.

Dans la littérature relative aux LES, il est classique de regrouper certains termes de l'expression (2.13) de la façon suivante (Ferziger, 1995):

$$\tau_{ij} = L_{ij} + C_{ij} + R_{ij} \quad (2.15)$$

$$L_{ij} = \overline{\overline{u_i} \overline{u_j}} - \overline{u_i} \overline{u_j} \quad (2.16)$$

$$C_{ij} = \overline{\overline{u_i} u'_j} + \overline{\overline{u_j} u'_i} \quad (2.17)$$

$$R_{ij} = \overline{u'_i u'_j} \quad (2.18)$$

Le terme L_{ij} est appelé terme de Leonard (Leonard, 1974). Ce terme est explicite puisqu'il peut être calculé directement. Il représente la dynamique entre les tourbillons de grandes échelles qui engendrent des structures de petites échelles. Le terme C_{ij} est le terme dit croisé qui représente l'interaction entre les grandes et les petites échelles. Quant au terme R_{ij} , il est nommé terme des contraintes de Reynolds et exprime l'interaction entre les tourbillons de petites échelles.

Il peut sembler approprié de modéliser séparément chaque groupe de termes du tenseur de sous-maille τ_{ij} . Puisque chacun de ces termes représente un phénomène physique différent, on se doit de comprendre, d'après Ferziger, 1995, qu'un modèle de sous-maille repose sur plusieurs hypothèses et n'est donc pas parfait. Les contraintes de sous-maille τ_{ij} constituent en effet des invariants galiléens⁵ alors que ni L_{ij} et ni C_{ij} ne le sont individuellement. À partir de ces considérations, il est donc préférable de modéliser le terme τ_{ij} comme un tout.

Germano, 1986 proposa de redéfinir les différents tenseurs de sous-maille L_{ij} , C_{ij} et R_{ij} afin de s'assurer que chacun de ces tenseurs possède la propriété d'invariance galiléenne. Pour obtenir cette décomposition de Germano, 1986, il suffit de substituer la relation (2.6) dans l'expression (2.14):

$$\tau_{ij} = \overline{(\bar{u}_i + u'_i)(\bar{u}_j + u'_j)} - \overline{(\bar{u}_i + u'_i)} \overline{(\bar{u}_j + u'_j)}$$

$$\tau_{ij} = L_{ij}^m + C_{ij}^m + R_{ij}^m \quad (2.19)$$

$$L_{ij}^m = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \overline{\bar{u}_i} \overline{\bar{u}_j} \quad (2.20)$$

$$C_{ij} = \overline{\bar{u}_i u'_j} + \overline{\bar{u}_j u'_i} - (\overline{\bar{u}_i} \overline{u'_j} + \overline{\bar{u}_j} \overline{u'_i}) \quad (2.21)$$

$$R_{ij} = \overline{u'_i u'_j} - \overline{u'_i} \overline{u'_j} \quad (2.22)$$

où L_{ij}^m , C_{ij}^m et R_{ij}^m sont les composantes modifiées du tenseur de sous-maille selon la définition de Germano, 1986. Ces composantes sont respectivement désignées comme contraintes de Léonard modifiées, contraintes croisées modifiées et tensions de Reynolds modifiées.

⁵Cette notion d'invariance galiléenne implique que la description d'un phénomène physique doit être la même dans tous les systèmes de référence inertiels.

Il est important de remarquer qu'une analogie apparaît entre la détermination de l'évolution des grandes échelles et la détermination du comportement du mouvement moyen de la vitesse u_i avec l'approche statistique RANS. En effet, on est confronté dans les deux cas au même problème de fermeture des équations du mouvement causé par la présence du terme des contraintes τ_{ij} . La différence fondamentale entre ces deux problèmes réside au niveau du phénomène physique que représentent les contraintes de sous-maille τ_{ij} dans l'approche des grandes échelles: l'utilisation de l'approche RANS nécessite de modéliser le mouvement moyen alors que la méthode LES requiert la modélisation des petites échelles uniquement (Ferziger, 1995). En d'autres termes, l'énergie de modélisation pour l'approche statistique RANS est de beaucoup supérieure à celle qui est nécessaire pour l'approche LES, ce qui rend la composante modélisation associée à l'approche RANS beaucoup plus cruciale que celle qui est employée avec l'approche LES.

Mentionnons pour terminer cette section que nous avons supposé la commutativité entre les opérateurs de filtrage et de dérivation lors de l'obtention de l'équation de Navier-Stokes filtrée (relation (2.12)). Ghosal et Moin, 1995 ont montré qu'une erreur d'ordre deux, $O(\Delta x_i^2)$ où Δx_i est la taille du maillage, est inhérente à cette supposition lors de l'application d'un filtre sur un maillage non uniforme. On peut cependant ignorer cette erreur de non-commutation si l'on utilise une méthode numérique d'ordre deux. On considère ainsi que l'erreur due à la non-commutativité des opérateurs n'affecte pas la précision de la méthode numérique. En revanche, cette erreur de non-commutation devient inacceptable pour des méthodes numériques d'ordre supérieur. Pour remédier à cette situation, Ghosal et Moin, 1995 introduisent des termes correctifs qu'il faut additionner aux équations habituelles des grandes échelles afin de s'assurer que l'erreur de non-commutation soit du même ordre de grandeur que l'erreur de troncature du schéma numérique utilisé. L'annexe I démontre en détail la non-commutativité des opérateurs de

filtrage et de dérivation lors de l'utilisation d'un filtre dont la taille varie spatialement.

2.6 Caractéristiques d'un modèle de sous-maille

Au chapitre 3, on décrira la formulation de différents modèles de sous-maille. Au paravant, nous présenterons brièvement ici les caractéristiques principales d'un modèle de sous-maille. Pour ce faire, il faut effectuer une analyse des équations de transport de l'énergie des grandes échelles et de celles des petites échelles que nous ne présentons pas ici mais que le lecteur intéressé peut retrouver dans le document de Piomelli, 1994. Comme le fait remarquer l'auteur, ces équations de transport montrent les différents mécanismes d'échange d'énergie. Ces échanges d'énergie se font généralement des grandes échelles vers les petites et donnent lieu à la dissipation de l'énergie. Cependant, il survient des situations physiques où le phénomène inverse se produit, c'est-à-dire que l'énergie se propage des petites structures vers les grandes et provoque la rétrodiffusion⁶ de l'énergie. Il est donc essentiel qu'un modèle de sous-maille puisse représenter les deux sens de propagation de l'énergie. Soulignons que le flux d'énergie inverse (la rétrodiffusion) est un phénomène plutôt rare et qu'il survient notamment dans les zones de recirculation et près des parois solides. Selon l'article synthèse de Piomelli, 1998, il faut également que l'on ne puisse obtenir aucune contribution de sous-maille ($\tau_{ij} = 0$) pour des écoulements qui sont en régime laminaire. Toujours d'après le même auteur, le modèle de sous-maille doit être fortement dépendant des petites échelles résolues car ces dernières sont analogues ou similaires aux grandes échelles non captées. Dans ce cas, on utilise l'information contenue dans les petites échelles résolues pour élaborer un modèle de sous-maille.

⁶La rétrodiffusion est nommé en anglais "backscatter".

Comme on vient de le voir, le modèle de sous-maille utilisé est en relation directe avec les mécanismes d'échange d'énergie d'un écoulement turbulent. D'après Piomelli, 1994, la majorité des interactions entre les grandes et les petites échelles ont lieu entre l'intervalle $(k_c/2 < k < k_c)$ et l'intervalle $(k_c < k < 2k_c)$. La figure 2.3 illustre ces deux intervalles du nombre d'onde où se produisent la majorité des interactions énergétiques.

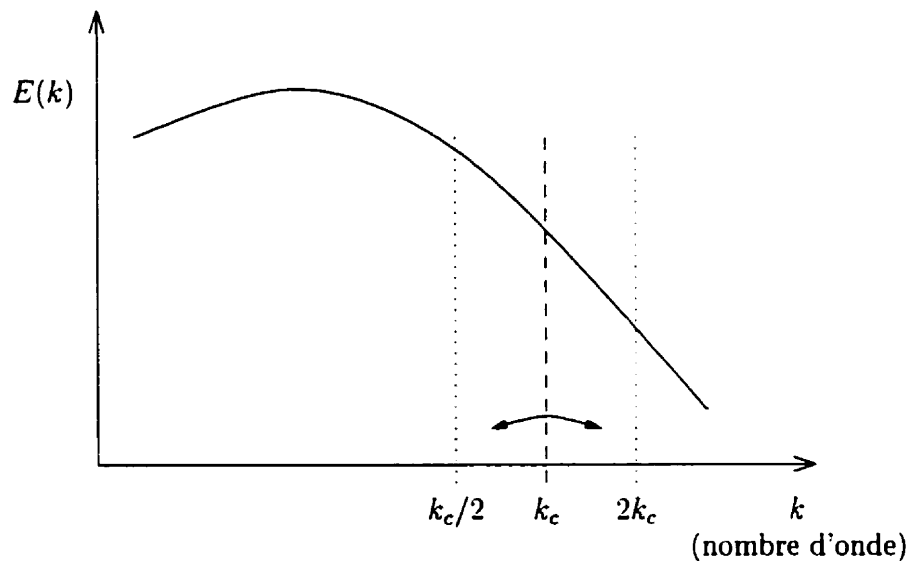


Figure 2.3 Intervalles de valeurs du nombre d'onde pour lesquels il y a présence d'interactions entre les grandes échelles et les petites.

Comme le fait remarquer Piomelli, 1998, la simulation des grandes échelles d'un écoulement tridimensionnel requiert des ressources informatiques et un temps de calcul importants dûs au nombre considérable de points de grille, typiquement de l'ordre du million et plus de points, et dûs à la période de temps de moyennage requise pour permettre la convergence des différentes statistiques. Il est donc crucial d'employer des modèles de sous-maille qui exigent un temps de calcul raisonnable afin d'assurer une certaine faisabilité pratique de l'approche des simulations des grandes échelles.

CHAPITRE 3

MODÉLISATION DE SOUS-MAILLE

3.1 Introduction

Au chapitre précédent, nous avons présenté l'équation du mouvement filtrée régissant l'évolution des grandes structures tourbillonnaires d'un écoulement turbulent. Cette équation comporte un terme pour les contraintes de sous-maille τ_{ij} représentant les échelles non résolues explicitement et qu'il faut donc modéliser. Ces échelles non résolues sont celles qui correspondent à la partie négligée du spectre d'énergie tel qu'illustré à la figure 2.2. Généralement, ces échelles non captées représentent le lieu de dissipation de l'énergie turbulente des grandes structures tourbillonnaires.

Dans ce chapitre, nous examinerons plusieurs modèles de sous-maille. On présentera tout d'abord le modèle de Smagorinsky développé en 1963 qui est, malgré sa grande simplicité, encore souvent employé dans le domaine des simulations des grandes échelles. Puis, on abordera le modèle de fonction de structure mis au point par Métais et Lesieur, 1992. Par la suite, on examinera le modèle de similitude d'échelles conçu par Bardina *et al.*, 1983 qui sert de principe de base pour le développement des modèles de sous-maille dynamiques. L'approche dynamique classique conçue par Germano *et al.*, 1991 et l'approche dynamique mixte développée par Zang *et al.*, 1993 sont décrits en détails dans ce chapitre.

3.2 Modèle de Smagorinsky

D'un point de vue historique, le modèle de Smagorinsky, 1963 est le plus ancien et le plus simple des modèles utilisés dans le domaine des simulations à grandes échelles. Il s'inspire du concept de Boussinesq et fait donc appel à une hypothèse de viscosité turbulente de sous-maille en établissant une relation entre les contraintes de sous-maille, τ_{ij} , et le tenseur de déformation S_{ij} de la façon suivante:

$$\tau_{ij} - 1/3 \tau_{kk} \delta_{ij} = -\nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) = -2\nu_t \bar{S}_{ij} \quad (3.1)$$

où \bar{S}_{ij} est le tenseur de déformation filtré et où ν_t est la viscosité turbulente dont il faut déterminer l'expression puisqu'elle est inconnue. Le modèle de Smagorinsky repose sur une hypothèse d'équilibre. Cet équilibre implique que l'énergie produite par les grandes échelles se transmet vers les échelles de plus en plus petites et que la dissipation d'énergie a lieu au niveau de la sous-maille. L'équation de transport pour l'énergie cinétique de sous-maille (q_{sgs}) a la forme suivante (voir Piomelli, 1994):

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_{sgs}^2}{\partial t} + \frac{\partial q_{sgs}^2 \bar{u}_j}{\partial x_j} = & [\text{transport turbulent}] + [\text{diffusion de pression}] + \\ & [\text{diffusion visqueuse}] + [\text{diffusion de sous-maille}] - 2\tau_{ij} \bar{S}_{ij} - 2\epsilon \end{aligned} \quad (3.2)$$

À l'équilibre, tous les termes de l'expression (3.2) sont nuls sauf les deux derniers. L'équation de transport de l'énergie de sous-maille s'exprime alors

$$-2\tau_{ij} \bar{S}_{ij} = \epsilon \quad (3.3)$$

L'équation (3.3) indique que le terme de production de l'énergie des grandes structures $\tau_{ij} \overline{S_{ij}}$ est en équilibre avec le taux de dissipation ϵ de la turbulence de sous-maille. Par une analyse dimensionnelle, on démontre que

$$\epsilon \sim \frac{q_{sm}^3}{l} \quad (3.4)$$

où q_{sm} est une échelle caractéristique de vitesse au niveau de la sous-maille et où l représente une longueur caractéristique de la sous-maille. De plus, la viscosité de turbulence de sous-maille doit être liée au produit d'une longueur et d'une échelle de vitesse que l'on écrit de la façon suivante:

$$\nu_t \sim l q_{sm} \quad (3.5)$$

Ainsi, en substituant les équations (3.1), (3.4) et (3.5) dans l'expression (3.3), on peut écrire que

$$2 \overline{S_{ij}} \overline{S_{ij}} l^4 \sim \nu_t^2$$

On élimine la proportionnalité en introduisant une constante C_s :

$$\begin{aligned} \nu_t^2 &= C_s^4 l^4 * 2 \overline{S_{ij}} \overline{S_{ij}} \\ \nu_t &= (C_s l)^2 * \sqrt{2 \overline{S_{ij}} \overline{S_{ij}}} \end{aligned} \quad (3.6)$$

L'échelle de longueur de sous-maille l est approximativement égale à la largeur du

filtre que l'on désigne par $\overline{\Delta}$, paramètre qui est du même ordre de grandeur que les plus petites échelles résolues par le maillage. La viscosité de sous-maille s'exprime donc finalement par:

$$\nu_t = (C_s \overline{\Delta})^2 |\overline{S}| \quad (3.7)$$

où

$$|\overline{S}| = (2 \overline{S_{ij}} \overline{S_{ij}})^{1/2} \quad (3.8)$$

$$\overline{\Delta} = (\overline{\Delta_1} \overline{\Delta_2} \overline{\Delta_3})^{1/3} \quad (3.9)$$

et où C_s est la constante de Smagorinsky et $|\overline{S}|$ est la norme du tenseur déformation. Il est également possible de vérifier que le modèle de Smagorinsky est un modèle uniquement dissipatif (Piomelli, 1994) donc que l'énergie de l'écoulement se propage des grandes structures vers les petites. Pour le démontrer, il s'agit d'écrire l'équation de l'énergie des grandes échelles et de remarquer que l'échange net d'énergie entre le champ à grandes échelles et le champ à petites échelles est représenté par le terme $\tau_{ij} \overline{S_{ij}}$. Si l'on dénote ce terme par D puisqu'il s'agit d'un terme de dissipation des grandes échelles, alors on écrit que:

$$D = \tau_{ij} \overline{S_{ij}} \quad (3.10)$$

En substituant les équations (3.1), (3.7) dans l'expression (3.10), on peut facilement démontrer que

$$D = -(C_s \overline{\Delta})^2 |\overline{S}|^3 < 0 \quad (3.11)$$

Étant donné que $(C_s \bar{\Delta})^2$ est toujours positif et que $|\bar{S}|$ l'est également, on peut donc conclure que $D < 0$. Lorsque $D < 0$, l'énergie des grandes structures diminue et se propage vers les petites échelles, lieu de sa dissipation.

L'évaluation de la constante C_s peut être effectuée en se basant sur le raisonnement de Lilly, 1967. Ce raisonnement suppose que la turbulence est isotrope et que le filtre utilisé est le passe-bas ou "Fourier cutoff". La valeur approximative déterminée par Lilly est égale à $C_s \approx 0.165$. Selon la nature de l'écoulement turbulent simulé, la valeur de la constante de Smagorinsky C_s est généralement comprise entre $0.1 \leq C_s \leq 0.2$.

En résumé, le modèle de Smagorinsky repose sur le concept de Boussinesq qui stipule que $\tau_{ij} = -2 \nu_t \bar{S}_{ij}$ où ν_t est la viscosité turbulente de sous-maille. Cette viscosité est liée à une constante que l'on nomme constante de Smagorinsky C_s , et à une longueur caractéristique $\bar{\Delta}$ qui est la largeur du filtre. D'après Ferziger, 1995 et Piomelli, 1994, le modèle de Smagorinsky semble en général fournir de bons résultats même lorsque les hypothèses émises lors du développement de ce modèle ne sont pas toujours rigoureusement respectées. Au chapitre 2, on a mentionné qu'un bon modèle de sous-maille doit absolument pouvoir représenter l'échange réciproque d'énergie entre les grandes échelles et les petites échelles. Or, puisque le modèle de Smagorinsky est dissipatif, l'énergie se propage uniquement dans un sens, c'est-à-dire des grandes structures vers les petites. De plus, dans notre développement, la constante de Smagorinsky conserve toujours la même valeur peu importe où l'on se situe dans l'écoulement. Or, Ferziger, 1995 a montré que cette constante doit présenter un comportement asymptotique qui est nécessaire pour représenter l'amortissement des structures turbulentes près des parois solides. Ainsi, pour améliorer le comportement du modèle de Smagorinsky dans le voisinage

des parois solides, on emploie très souvent la relation empirique de Van Driest, 1956:

$$C_s = C_{s0}(1 - e^{-y^+/A^+})^2 \quad (3.12)$$

où y^+ est la distance perpendiculaire entre le point de calcul et la paroi en unité de viscosité et où A^+ est une constante adimensionnelle dont la valeur est de 25. C_{s0} est la valeur de la constante telle qu'indiquée précédemment soit $C_{s0} \approx 0.165$.

Le modèle de Smagorinsky a également tendance à amortir fortement les perturbations dans un régime de transition ce qui amène l'écoulement à redevenir laminaire même lorsque le nombre de Reynolds est critique. Pour remédier à ce problème, Piomelli *et al.*, 1990 ont introduit une fonction intermittente près des parois pour réduire les contraintes de sous-maille.

Un autre problème majeur de la modélisation de Smagorinsky provient du fait que l'on suppose que le tenseur de sous-maille τ_{ij} est aligné selon le tenseur de déformation $\overline{S_{ij}}$. Or, Clark *et al.*, 1979 ont démontré qu'il existe une très faible corrélation entre τ_{ij} et $\overline{S_{ij}}$. C'est principalement pour cette raison que les chercheurs dans le domaine des simulations des grandes échelles ont développé des modèles de sous-maille ne faisant pas appel à cette supposition. L'approche dynamique mixte élaborée par Zang *et al.*, 1993 qui sera présentée à la sous-section 3.5.2 en est un exemple.

3.3 Modèle de fonction de structure

Ce modèle a été développé par Métails et Lesieur, 1992. Il permet de passer du modèle de viscosité turbulente spectrale conçu par Chollet et Lesieur, 1981 au domaine

de l'espace physique. Pour ce faire, on évalue la viscosité turbulente spectrale par l'intermédiaire de l'énergie cinétique locale du spectre $E(k_c) = C_K \epsilon^{2/3} (k_c)^{-5/3}$, où C_K est la constante de Kolmogorov et ϵ est le taux de dissipation de l'énergie, pour l'échelle de coupure $k_c = \pi/\bar{\Delta}$. Cette énergie locale peut être exprimée à l'aide d'une fonction de structure du second ordre $F_2(\vec{x}, \bar{\Delta}, t)$:

$$F_2(\vec{x}, \bar{\Delta}, t) = \langle \|\vec{u}(\vec{x}, t) - \vec{u}(\vec{x} + \vec{r}, t)\|^2 \rangle_{\|\vec{r}\|=\bar{\Delta}} \quad (3.13)$$

où $\langle \rangle$ dénote une moyenne spatiale sur les points distants de $\bar{\Delta}$ du vecteur \vec{x} . Par la suite, Batchelor, 1953 a démontré que pour une turbulence isotrope¹,

$$F_2(r, t) = 4 \int_0^{k_c} E(k, t) \left(1 - \frac{\sin(kr)}{kr} \right) dk \quad (3.14)$$

En utilisant un spectre de la forme $E(k) = C_K \epsilon^{2/3} k^{-5/3}$ et en calculant numériquement cette dernière intégrale, on peut montrer que la fonction de structure s'exprime comme suit:

$$F_2(r, t) = 4.82 C_K (\epsilon r)^{\frac{2}{3}} \quad (3.15)$$

Maintenant, en supposant que k_c se situe dans la zone inertielle du spectre d'énergie, on écrit:

$$E(k_c) = \frac{1}{4.82} \pi^{-5/3} \bar{\Delta} [F_2(\bar{\Delta}, t)] \quad (3.16)$$

¹L'isotropie signifie que la turbulence est invariante en moyenne par rotation.

Métais et Lesieur, 1992 proposent que la viscosité turbulente locale satisfasse la relation suivante dans l'espace physique:

$$\nu_t = \frac{2}{3} C_K^{-3/2} \left(\frac{E(k_c)}{k_c} \right)^{1/2} \quad (3.17)$$

Il suffit ensuite de substituer l'équation (3.16) et la relation $k_c = \pi/\overline{\Delta}$ dans l'expression (3.17). On écrit donc:

$$\nu_t = 0.066 C_K^{-3/2} \overline{\Delta} [F_2(\vec{x}, \overline{\Delta}, t)]^{1/2} \quad (3.18)$$

Finalement, en exprimant la fonction de structure du champ instantané de vitesse, F_2 , en terme du champ de vitesse instantané filtré soit \overline{F}_2 . Métais et Lesieur, 1992 montrent que

$$F_2(\vec{x}, \overline{\Delta}, t) = 2.53 * \overline{F}_2(\vec{x}, \overline{\Delta}, t) \quad (3.19)$$

On peut maintenant écrire la relation (3.18) de la viscosité turbulente en fonction de la fonction de structure filtrée:

$$\nu_t = 0.105 C_K^{-3/2} \overline{\Delta} [\overline{F}_2(\vec{x}, \overline{\Delta}, t)]^{1/2} \quad (3.20)$$

En pratique, on emploie une moyenne arithmétique sur les points de grille avoisinant \vec{x} pour déterminer la fonction de structure \overline{F}_2 . Cette moyenne arithmétique

s'exprime de la façon suivante pour un maillage régulier:

$$\begin{aligned} \overline{F_2}(\vec{x}, \vec{\Delta}, t) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 [& \|\vec{u}(\vec{x}, t) - \vec{u}(\vec{x} + \vec{\Delta} x_i \vec{e}_i, t)\|^2 \\ & + \|\vec{u}(\vec{x}, t) - \vec{u}(\vec{x} - \vec{\Delta} x_i \vec{e}_i, t)\|^2] \end{aligned} \quad (3.21)$$

L'utilisation du modèle de fonction de structure pour l'écoulement turbulent d'une marche descendante a montré dans l'étude de Neto *et al.*, 1993 que les résultats obtenus correspondent mieux aux valeurs expérimentales que ceux obtenus avec le modèle de Smagorinsky et le modèle $k - \epsilon$. Par contre, comme le modèle de Smagorinsky, le modèle de fonction de structure amortit fortement les perturbations dans un écoulement en régime de transition. Pour rectifier ce problème, le modèle de fonction de structure sélective élaboré par David, 1993, consiste à annuler localement la viscosité turbulente aux endroits où l'écoulement n'est pas suffisamment tridimensionnel. Le critère de tridimensionnalité est déterminé en mesurant l'angle entre la vorticité à un certain point du maillage et la vorticité moyenne calculée à partir des six points les plus proches. Dans le cadre de cette thèse, on emploiera le modèle original développé par Métais et Lesieur, 1992. Pour plus d'informations au sujet du modèle de fonction de structure sélective, le lecteur intéressé est référé au travail de David, 1993.

3.4 Modèle de similitude d'échelles

Le modèle de similitude d'échelles développé par Bardina *et al.*, 1983 repose sur le fait que la majorité des interactions entre les grandes et les petites échelles ont lieu près de la zone de coupure du spectre d'énergie. On suppose que le champ des

grandes structures non résolues doit être très similaire à celui des petites échelles résolues. Ainsi, l'information contenue dans les petites échelles résolues peut certainement servir à l'élaboration d'un modèle de sous-maille représentatif des phénomènes physiques qui se produisent dans cette zone. La figure 3.1 schématise l'ensemble des échelles tourbillonnaires présentes avec le modèle de similitude d'échelles. Dans le domaine des simulations des grandes échelles, ce modèle est couramment désigné par: modèle de Bardina.

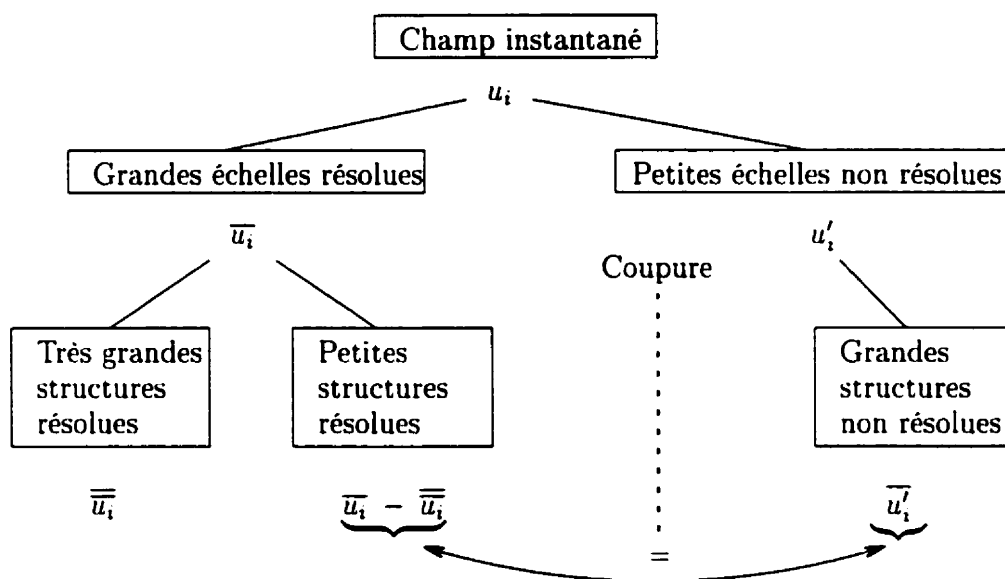


Figure 3.1 Les différentes échelles mises en jeu dans le modèle de similitude d'échelles.

Dans un premier temps, on sait qu'une opération de filtrage sur un champ de vitesse turbulent u_i donne \bar{u}_i et représente les grandes échelles résolues (échelles explicites). Une deuxième opération de filtrage sur \bar{u}_i fournit le champ $\bar{\bar{u}}_i$ qui est appelé champ des très grandes structures résolues. Ce champ est plus riche en grandes échelles que le champ \bar{u}_i . Ainsi, les petites structures résolues sont définies comme étant données par $\bar{u}_i - \bar{\bar{u}}_i$ et représentent des tourbillons d'échelle voisine au nombre d'onde de coupure. Les grandes structures non captées sont quant à

elles définies par $\overline{u'_i}$. On peut facilement démontrer que $\overline{u'_i} = \overline{u_i} - \overline{\overline{u_i}}$ donc que la connaissance des champs explicites permet de connaître celui de la sous-maille. Pour ce faire, il faut utiliser les expressions du terme de Léonard L_{ij} , du terme croisé C_{ij} et du terme des tensions de Reynolds R_{ij} . On réécrit donc les équations (2.16), (2.17) et (2.18) comme suit:

$$L_{ij} = \overline{\overline{u_i} \overline{u_j}} - \overline{u_i} \overline{u_j} \quad (3.22)$$

$$C_{ij} = \overline{\overline{u_i} u'_j} + \overline{\overline{u_j} u'_i} \sim \overline{\overline{u_i} u'_j} + \overline{\overline{u_j} u'_i} \quad (3.23)$$

$$R_{ij} = \overline{u'_i u'_j} \sim \overline{u'_i} \overline{u'_j} \quad (3.24)$$

Maintenant, en substituant les expressions $\overline{u'_i} = \overline{u_i} - \overline{\overline{u_i}}$ et $\overline{u'_j} = \overline{u_j} - \overline{\overline{u_j}}$ dans les équations (3.23) et (3.24) et en utilisant la relation (2.15) pour exprimer τ_{ij} , on peut montrer que le modèle de similitude d'échelles exprime le tenseur des contraintes de sous-maille τ_{ij} de la façon suivante:

$$\tau_{ij} = \overline{\overline{u_i} \overline{u_j}} - \overline{\overline{u_i}} \overline{\overline{u_j}} \quad (3.25)$$

Cette dernière relation est inconsistante car la trace du tenseur τ_{ij} n'est pas égale à $(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33})$. Rigoureusement, la relation (3.25) doit donc s'écrire plutôt comme suit:

$$\tau_{ij} - 1/3 \tau_{kk} \delta_{ij} = [\overline{\overline{u_i} \overline{u_j}} - \overline{\overline{u_i}} \overline{\overline{u_j}}] - 1/3 L_{kk}^m \delta_{ij} \quad (3.26)$$

Ainsi, la modélisation de Bardina *et al.*, 1983 n'est rien d'autre qu'une représenta-

tion du tenseur de sous-maille τ_{ij} par les contraintes de Léonard L_{ij}^m (voir la relation (2.20)) telles que définies par Germano, 1986. Autrement dit, le modèle de similitude d'échelles se résume à négliger les contraintes croisées C_{ij}^m et les contraintes de Reynolds R_{ij}^m et à ne conserver seulement que les contraintes de Léonard modifiées L_{ij}^m .

Il s'avère que ce modèle de similitude d'échelles dissipe très difficilement l'énergie de turbulence lors des simulations des grandes échelles. Ceci s'explique essentiellement par le fait que les contraintes de sous-maille s'expriment uniquement en fonction du champ résolu (Ferziger, 1995). Or, le rôle principal d'un modèle de sous-maille est de dissiper l'énergie jusqu'aux échelles non captées par le maillage. Pour tenir compte de l'effet de dissipation des petites échelles, on combine le modèle de Smagorinsky au modèle de similitude d'échelles (voir la relation (3.26)) pour ainsi obtenir le modèle mixte qui s'écrit comme suit:

$$\tau_{ij} - 1/3 \tau_{kk} \delta_{ij} = \left[\overline{\overline{u_i u_j}} - \overline{\overline{u_i}} \overline{\overline{u_j}} \right] - 1/3 L_{kk}^m \delta_{ij} - 2 \nu_t \overline{S_{ij}} \quad (3.27)$$

Ce modèle mixte possède ainsi des caractéristiques très intéressantes grâce à son caractère dissipatif et à son aptitude à redistribuer l'énergie des petites échelles de sous-maille vers les échelles résolues par l'intermédiaire des contraintes de Léonard L_{ij}^m . Précisons finalement que le modèle mixte correspond simplement au modèle de Smagorinsky appliqué à $C_{ij}^m + R_{ij}^m$ et au calcul direct (explicite) de L_{ij}^m . Ce dernier point démontre l'importance des contraintes de Léonard puisqu'elles sont responsables du transfert d'énergie entre les différentes structures turbulentes.

3.5 Modèles dynamiques

On a vu que le modèle de Smagorinsky permet de représenter la propagation de l'énergie des grandes échelles vers les petites mais n'est pas en mesure de représenter l'interaction inverse soit la rétrodiffusion. Il est en effet impossible avec ce modèle de décrire correctement tous les phénomènes présents dans un écoulement turbulent avec une seule constante universelle et globale. L'approche dynamique conçue par Germano *et al.*, 1991 consiste à déterminer de façon locale cette constante qui est liée à la viscosité turbulente. En d'autres mots, la constante du modèle est déterminée dynamiquement au fur et à mesure que la simulation des grandes échelles progresse. Tout comme pour le modèle de similitude d'échelles, le concept de l'approche dynamique repose sur la connaissance du comportement des petites échelles résolues qui permet de déduire celui des structures de sous-maille. Pour ce faire, il faut appliquer un deuxième filtre aux équations de Navier-Stokes filtrées. Ce filtre est souvent nommé filtre-test et possède une largeur caractéristique $\tilde{\Delta}$ supérieure à celle du filtre original $\bar{\Delta}$. Les contraintes de sous-maille obtenues avec la première opération de filtrage ont la forme suivante (voir équation (2.14)):

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (3.28)$$

De la même manière, il est possible de déterminer les contraintes de sous-maille au niveau du filtre-test dont la forme est

$$T_{ij} = \widetilde{\overline{u_i u_j}} - \tilde{\bar{u}}_i \tilde{\bar{u}}_j \quad (3.29)$$

À partir de là, on définit le champ des contraintes explicites au niveau du filtre-test comme étant:

$$\mathbb{L}_{ij} = \widetilde{\overline{u_i u_j}} - \widetilde{u_i} \widetilde{u_j} \quad (3.30)$$

Ces contraintes explicites \mathbb{L}_{ij} représentent en fait la contribution des plus petites échelles résolues² aux tensions turbulentes de l'écoulement. Les deux niveaux de contraintes, τ_{ij} et T_{ij} , sont reliées par l'identité de Germano:

$$\mathbb{L}_{ij} = T_{ij} - \widetilde{\tau_{ij}} \quad (3.31)$$

Cette identité de Germano est très importante puisqu'elle est à la base de l'approche dynamique. Elle établit la correspondance entre les contraintes de sous-maille résultant de l'application du filtre-test et celles qui résultent de l'application du filtre du maillage. L'hypothèse fondamentale de l'approche dynamique réside dans le fait que le modèle de sous-maille utilisé doit s'appliquer également pour les deux niveaux de filtre. Nous arrivons donc au moment où il nous faut sélectionner un modèle de sous-maille pour représenter les contraintes τ_{ij} et T_{ij} . Ainsi, si l'on opte pour le modèle de Smagorinsky, nous obtenons l'approche dynamique classique telle que développée par Germano *et al.*, 1991. L'autre possibilité est d'utiliser le modèle mixte qui mène à l'approche dynamique mixte telle que conçue par Zang *et al.*, 1993. Comme nous le verrons par la suite, l'approche dynamique mixte offre plusieurs avantages comparativement à l'approche dynamique classique. Dans ce

²Les plus petites échelles résolues représentent les structures turbulentes comprises entre la largeur du filtre-test $\widetilde{\Delta}$ et celle du filtre du maillage $\overline{\Delta}$.

qui suit, nous présentons les détails de la formulation de ces deux versions de l'approche dynamique.

3.5.1 Approche dynamique classique

Comme nous l'avons déjà précisé, l'approche dynamique classique consiste à utiliser le modèle de Smagorinsky pour les contraintes τ_{ij} et T_{ij} . On reprend donc l'équation (3.1) à l'intérieur de laquelle on substitue la relation de la viscosité turbulente soit l'équation (3.7) et on exprime ainsi les contraintes liées au filtre original ($\bar{\Delta}$):

$$\tau_{ij} - 1/3 \tau_{kk} \delta_{ij} = -2C \bar{\Delta}^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} \quad (3.32)$$

De la même façon, les contraintes de sous-maille liées au filtre-test ($\tilde{\Delta}$) s'écrivent:

$$T_{ij} - 1/3 T_{kk} \delta_{ij} = -2C \tilde{\Delta}^2 |\tilde{S}| \tilde{S}_{ij} \quad (3.33)$$

Par la suite, on substitue les expressions (3.32) et (3.33) dans l'identité de Germano (3.31):

$$\mathbb{L}_{ij} - 1/3 \mathbb{L}_{kk} \delta_{ij} = -2C \bar{\Delta}^2 M_{ij} \quad (3.34)$$

où

$$M_{ij} = \left(\alpha^2 |\tilde{S}| \tilde{S}_{ij} - \widetilde{|\bar{S}| \bar{S}_{ij}} \right) \quad (3.35)$$

et où

$$\alpha = \tilde{\Delta}/\overline{\Delta} \quad (3.36)$$

Avec l'équation (3.34), on remarque que les deux membres de l'équation sont explicites à l'exception de la constante C . En effet, le terme \mathbb{L}_{ij} peut se calculer explicitement alors que le membre de droite de (3.34) est uniquement fonction du tenseur de déformation. Comme la relation (3.34) est constituée de six équations indépendantes pour chaque noeud du maillage, la constante C est ainsi surdéterminée. Pour contrer ce problème, on effectue une double contraction de chaque côté de l'équation (3.34) avec le tenseur M_{ij} . On écrit alors que

$$C = -\frac{\mathbb{L}_{ij} \cdot M_{ij}}{2\overline{\Delta}^2 \cdot M_{ij} \cdot M_{ij}} \quad (3.37)$$

Rappelons que la double contraction de deux tenseurs s'écrit plus explicitement comme étant:

$$\mathbb{L}_{ij} \cdot M_{ij} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mathbb{L}_{ij} \cdot M_{ij} \quad (3.38)$$

L'expression optimale de la constante dynamique C peut également être déterminée par la méthode des moindres carrés. Cette façon de faire a été proposée par Lilly, 1992 et consiste à minimiser l'erreur Q commise sur l'expression (3.34):

$$Q = \left(\mathbb{L}_{ij} - 1/3\delta_{ij}\mathbb{L}_{kk} + 2C\overline{\Delta}^2 M_{ij} \right)^2 \quad (3.39)$$

On évalue ensuite le terme C de façon à ce que $\partial Q/\partial C = 0$ et que $\partial^2 Q/\partial C^2 > 0$:

$$\begin{aligned}\partial Q/\partial C &= 2 \left(\mathbb{L}_{ij} - 1/3 \delta_{ij} \mathbb{L}_{kk} + 2C \overline{\Delta}^2 M_{ij} \right) * 2 \overline{\Delta}^2 M_{ij} = 0 \\ 4 \overline{\Delta}^2 \mathbb{L}_{ij} M_{ij} - 4/3 \overline{\Delta}^2 \delta_{ij} \mathbb{L}_{kk} M_{ij} + 8C \overline{\Delta}^4 M_{ij} M_{ij} &= 0\end{aligned}\quad (3.40)$$

On peut facilement démontrer que le terme $\delta_{ij} \mathbb{L}_{kk} M_{ij} = 0$ (termes isotropes) pour un fluide incompressible car $M_{ii} = 0$. En isolant la constante C de l'expression (3.40), on retrouve:

$$C = - \frac{\mathbb{L}_{ij} M_{ij}}{2 \overline{\Delta}^2 M_{ij} M_{ij}}$$

Étant donné que pour cette expression de C la dérivée seconde ($\partial^2 Q/\partial C^2 = 8 \overline{\Delta}^4 M_{ij} M_{ij}$) est positive, on peut donc affirmer qu'il s'agit bien d'un point minimum.

L'expérience numérique montre que la constante C est une fonction de l'espace et du temps. Or, l'écriture de l'équation (3.34) suppose que C comporte de faibles variations spatiales dans le volume du filtre-test. D'après Ferziger, 1995, des simulations de grandes échelles avec l'approche dynamique classique où l'on utilise l'expression (3.37) ont démontré que les évolutions spatiale et temporelle de la constante sont très fluctuantes. Ce phénomène est responsable de l'obtention de grandes viscosités turbulentes qui peuvent être positives ou négatives. Or, il s'avère que dans certaines simulations, la viscosité turbulente demeure négative pour plusieurs étapes de temps ce qui entraîne des instabilités numériques³. Pour

³Ces instabilités numériques provoquent une divergence de la simulation numérique car elles

remédier à ce problème, Germano *et al.*, 1991 proposèrent de moyenner spatialement le numérateur et le dénominateur de l'expression (3.37) dans les directions d'homogénéité de l'écoulement. On exprime alors la constante C de la manière suivante:

$$C = - \frac{\langle L_{ij} M_{ij} \rangle}{2 \bar{\Delta}^2 \langle M_{ij} M_{ij} \rangle} \quad (3.41)$$

où $\langle \rangle$ représente la moyenne spatiale.

En résumé, l'approche dynamique classique permet de calculer la constante C à chaque point d'un maillage et pour chaque pas de temps d'une simulation numérique. La constante C est directement liée à la viscosité turbulente de sous-maille: cette dernière s'ajuste ainsi localement en fonction de l'endroit du maillage où l'on calcule les caractéristiques de l'écoulement turbulent. L'utilisation de l'approche dynamique classique possède plusieurs avantages présentés par Piomelli, 1994 et Ferziger, 1995. Tout d'abord, l'approche dynamique classique est capable de représenter la cascade d'énergie des grandes échelles vers les petites lorsque $C > 0$ et également la rétrodiffusion lorsque $C < 0$. Près des parois solides, le comportement de la constante C est asymptotique donc il n'est pas nécessaire de recourir à des relations empiriques comme nous l'avons présenté pour le modèle de Smagorinsky où l'on doit utiliser des expressions comme celle de Van Driest (voir équation (3.12)). De plus, pour un régime laminaire, la constante devient nulle et donc aucune contribution turbulente ne vient affecter l'écoulement.

engendrent une brusque augmentation de l'énergie totale de l'écoulement.

3.5.2 Approche dynamique mixte

Zang *et al.*, 1993 ont conçu l'approche dynamique mixte en proposant de représenter les contraintes τ_{ij} et T_{ij} par le modèle mixte. Ainsi, on reprend l'équation (3.27) à l'intérieur de laquelle on substitue la relation de la viscosité turbulente de sous-maille afin d'exprimer les contraintes liées au filtre original ($\bar{\Delta}$):

$$\tau_{ij} - 1/3\tau_{kk} \delta_{ij} = -2C\bar{\Delta}^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} + L_{ij}^m - 1/3L_{kk}^m \delta_{ij} \quad (3.42)$$

où L_{ij}^m représente le tenseur de Léonard modifié selon la définition de Germano, 1986. Ce tenseur est défini à l'équation (2.20) et réécrit ici:

$$L_{ij}^m = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$$

De la même façon, on emploie le modèle mixte pour les contraintes de sous-maille liées au filtre-test ($\tilde{\Delta}$):

$$T_{ij} - 1/3T_{kk} \delta_{ij} = -2C\tilde{\Delta}^2 |\tilde{S}| \tilde{S}_{ij} + L_{ij}^T - 1/3L_{kk}^T \delta_{ij} \quad (3.43)$$

où $L_{ij}^T = \widetilde{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j$ est le tenseur de Léonard modifié au niveau du filtre-test. Par la suite, on substitue les expressions (3.42) et (3.43) dans l'identité de Germano (3.31). On obtient après quelques manipulations:

$$\mathbb{L}_{ij} - H_{ij} = -2C\bar{\Delta}^2 M_{ij} + \delta_{ij} P_{kk} \quad (3.44)$$

où

$$M_{ij} = \left(\alpha^2 |\tilde{S}| \widetilde{\tilde{S}_{ij}} - |\tilde{S}| \widetilde{\tilde{S}_{ij}} \right) \quad (3.45)$$

$$H_{ij} = \widetilde{\widetilde{\tilde{u}_i}} \widetilde{\widetilde{\tilde{u}_j}} - \widetilde{\tilde{u}_i} \widetilde{\tilde{u}_j} \quad (3.46)$$

et où

$$\alpha = \tilde{\Delta} / \bar{\Delta} \quad (3.47)$$

Comme nous l'avons montré pour l'approche dynamique classique, on peut déterminer la valeur optimale de la constante C permettant de minimiser l'erreur commise sur l'expression (3.44) à l'aide de la méthode des moindres carrés. En procédant de la sorte, on trouve que

$$C = - \frac{(\mathbb{L}_j - H_{ij}) M_{ij}}{2 \bar{\Delta}^2 M_{ij} M_{ij}} \quad (3.48)$$

Pour obtenir cette expression de la constante, nous avons, comme dans le développement montré pour l'approche dynamique classique, supposé que les variations spatiales de C sont faibles à l'intérieur du volume correspondant au filtre-test. Encore une fois, la constante C étant déterminée par la relation (3.48), cette valeur est substituée dans la relation (3.42) pour obtenir les contraintes de sous-maille τ_{ij} de l'écoulement turbulent.

Tout comme pour l'approche dynamique classique, l'approche dynamique mixte possède un comportement adéquat près des parois solides, annule les contraintes de sous-maille en régime laminaire et permet de représenter la redistribution de

l'énergie vers les grandes échelles résolues soit la rétrodiffusion. De plus, l'aspect modélisation de l'approche dynamique mixte est appliqué uniquement à la somme des contraintes croisées et des contraintes de Reynolds, $(C_{ij}^m + R_{ij}^m)$, alors que le terme de Léonard modifié est calculé explicitement⁴. L'approche dynamique mixte comporte donc une composante modélisation moins importante que celle de l'approche dynamique classique, pour laquelle il est nécessaire de modéliser l'ensemble des contraintes de Léonard, des contraintes croisées et des contraintes de Reynolds, $(L_{ij}^m + C_{ij}^m + R_{ij}^m)$. Ceci constitue un avantage important pour l'obtention d'une représentation plus fidèle de la réalité. Comme le font remarquer Zang *et al.*, 1993, le terme de Léonard modifié L_{ij}^m est responsable en grande partie du retour d'énergie des échelles de sous-maille vers les échelles résolues et explique donc que les variations du paramètre C soient moins importantes que lors de l'utilisation de l'approche dynamique classique. Par conséquent, les simulations des grandes échelles utilisant l'approche dynamique mixte sont plus stables. Finalement, l'approche dynamique mixte ne suppose pas d'alignement direct entre les contraintes de sous-maille τ_{ij} et le tenseur de déformation $\overline{S_{ij}}$ comme c'est le cas avec le modèle de Smagorinsky et avec l'approche dynamique classique⁵.

Comme nous l'avons déjà précisé, le raisonnement ayant conduit à l'obtention de l'expression (3.48) suppose que les variations spatiales de C sont faibles à l'intérieur du filtre-test. En effet, lors de la substitution utilisée dans l'identité de Germano (3.31), nous avons considéré le paramètre C comme étant constant lors de l'opération de filtrage. C'est pour cette raison qu'une fois le calcul de C effectué avec l'expression (3.48), le paramètre C est moyenné à l'intérieur du volume du filtre-test sur trois noeuds dans chacune des directions. Zang *et al.*, 1993 pré-

⁴Il suffit d'observer la relation (3.42) pour comprendre cette affirmation.

⁵À la section 3.2, nous avons discuté de la faible corrélation existante entre τ_{ij} et $\overline{S_{ij}}$ pour le modèle de Smagorinsky.

cisent que malgré cette moyenne locale, il s'avère que la viscosité totale ($\nu + \nu_t$) devient négative et rend le calcul numérique instable. Pour éviter ces instabilités numériques, il est recommandé d'annuler la viscosité totale aux endroits où cette dernière est négative. Zang *et al.*, 1993 ainsi que Pèneau, 1999 précisent cependant qu'il n'arrive que très rarement que l'on doit intervenir de la sorte sur la viscosité totale.

L'approche dynamique classique constitue par ailleurs un cas particulier de l'approche dynamique mixte. En effet, si l'on élimine les contraintes de Léonard modifiées dans les expressions (3.42) et (3.43) de l'approche dynamique mixte, le terme H_{ij} est nul et l'on obtient la même expression de la constante C qu'avec l'approche classique (voir l'expression (3.37)).

Le dernier point sur lequel il est important de se pencher est celui de la valeur du paramètre α qui représente le ratio entre le filtre-test ($\tilde{\Delta}$) et le filtre du maillage ($\overline{\Delta}$). Germano *et al.*, 1991 ont démontré qu'un rapport de deux était la valeur optimale à utiliser lors des simulations d'un canal turbulent⁶. La raison en pratique de ce choix provient de la notion des échanges d'énergie dans l'espace spectral. Comme nous l'avons déjà précisé au chapitre 2, d'après Piomelli, 1994, les principales interactions entre les grandes échelles et les petites échelles ont lieu entre l'intervalle ($k_c/2 < k < k_c$) et l'intervalle ($k_c < k < 2k_c$) d'un spectre d'énergie (voir la figure 2.3). Rappelons que k_c représente le nombre d'onde à la coupure ($k_c = \pi/\overline{\Delta}$) et est inversement proportionnel à l'échelle de longueur du maillage. L'intervalle ($k_c < k < 2k_c$) n'existe pas explicitement dans une simulation de grandes échelles. Cependant, il faut se servir de l'information contenue dans l'intervalle ($k_c/2 < k < k_c$) représentant les petites échelles résolues pour construire un modèle de sous-maille. C'est précisément la philosophie de l'approche dy-

⁶Cette valeur est aussi employée pour des configurations autres que celle d'un canal.

namique où en prenant un filtre-test de dimension deux fois plus grande que celle du filtre du maillage, on considère donc la contribution de l'intervalle ($k_c/2 < k < k_c$) du spectre d'énergie. Précisons finalement que les expériences numériques menées par Germano *et al.*, 1991 ont présenté une faible sensibilité des résultats numériques face au paramètre α .

Finalement, la présence du paramètre α faisant intervenir deux niveaux de filtrage nous amène à nous poser la question suivante: *Comment déterminer toutes les quantités impliquées dans l'approche dynamique?* En effet, l'approche dynamique fait intervenir des quantités doublement filtrées comme $\overline{\overline{u_i}}$ relatives à l'échelle du maillage et des quantités filtrées relatives à l'échelle du filtre-test comme $\widetilde{\widetilde{u_i}}$. Pour déterminer toutes ces quantités, on se sert d'interpolations linéaires et de la méthode d'intégration des trapèzes composés. L'annexe II décrit en détails toutes les opérations nécessaires pour obtenir l'ensemble des quantités impliquées dans l'approche dynamique.

CHAPITRE 4

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES TRIDIMENSIONNELLES

4.1 Introduction

La simulation des grandes échelles requiert la résolution numérique des équations de Navier-Stokes filtrées, tridimensionnelles et instationnaires. Il est essentiel d'employer une méthode numérique précise dans les domaines temporel et spatial. En effet, une des conclusions de l'étude effectuée par Kravchenko et Moin, 1997 montre que pour un schéma numérique d'ordre peu élevé, le spectre d'énergie est grandement déformé par l'erreur de troncature pour les grands nombres d'ondes. Cette erreur altère et affaiblit la contribution du modèle de sous-maille d'où la nécessité d'opter pour une discrétisation numérique d'ordre 2 et plus. D'autres analyses, telles que celles de Ghosal, 1995, Fureby, 1998, Piomelli, 1998 indiquent clairement l'importance d'effectuer des simulations à grande échelle avec un schéma numérique qui est d'ordre 2 et plus pour que la contribution du modèle de sous-maille puisse se manifester dans la solution obtenue.

Ce chapitre présente donc une description complète de la méthode numérique développée dans ce travail pour la simulation des grandes échelles. Le code numérique a été construit de façon à satisfaire les critères de consistance, de précision et de rapidité qui caractérisent un bon code de calcul. Ce code résout les équations de Navier-Stokes d'un écoulement tridimensionnel, incompressible et instationnaire avec une précision $O(\Delta x^2, \Delta t^2)$. L'approche numérique choisie est essentiellement celle qui est utilisée par Kim et Moin, 1985 dont les fondements reposent sur

l'utilisation d'une méthode à pas fractionnaire et d'une technique de factorisation approchée.

4.2 Méthode à pas fractionnaire et discrétisation de l'équation de Navier-Stokes

Au chapitre 2, nous avons présenté les équations de continuité et du mouvement filtrées pour un écoulement incompressible (voir les relations (2.10) et (2.12)). Ces équations sont réécrites et s'expriment de la façon suivante:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.1)$$

$$\underbrace{\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}}_{\text{terme temporel}} + \underbrace{\frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j}}_{\text{terme de convection}} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}}_{\text{gradient de pression}} - \underbrace{\nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)}_{\text{terme de diffusion}} + \underbrace{\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}}_{\text{terme de sous-maille}} = 0 \quad (4.2)$$

L'intégration dans le domaine du temps de l'équation du mouvement est réalisée par une méthode dite à pas fractionnaire communément désignée en anglais par "Fractional-Step Method". Deux étapes caractérisent cette technique de résolution du champ de vitesse¹ u_i^{n+1} à divergence nulle. La discrétisation des termes de sous-maille et des termes de convection qui sont non linéaires s'effectue de façon explicite par un schéma d'Adams-Bashforth d'ordre 2 alors que les termes de diffusion sont traités implicitement par un schéma d'ordre 2 de Crank-Nicolson. La discrétisation globale du schéma peut donc être qualifiée de semi-implicite.

¹Pour la suite de ce chapitre, les quantités filtrées seront dénotées sans la barre supérieure afin d'alléger l'écriture des équations.

Les deux étapes de la méthode à pas fractionnaire sont les suivantes:

Étape 1:

$$\frac{\hat{u}_i - u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}(3H_i^n - H_i^{n-1}) + \frac{\nu}{2} \frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial x_j^2} + \frac{\nu}{2} \frac{\partial^2 u_i^n}{\partial x_j^2} \quad (4.3)$$

Étape 2:

$$u_i^{n+1} = \hat{u}_i - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial x_i} \quad (4.4)$$

où H_i contient les différents termes de convection et de sous-maille et où le champ ϕ est un scalaire qu'il reste à déterminer. La première étape consiste à résoudre l'équation du mouvement sans le terme gradient de pression d'où l'introduction du champ de vitesse intermédiaire \hat{u}_i qui ne respecte donc pas le principe de conservation de la masse. La seconde étape se veut une correction du champ intermédiaire \hat{u}_i visant à obtenir le champ de vitesse u_i^{n+1} à divergence nulle. Mathématiquement, cette dernière étape revient à projeter le champ intermédiaire sur le champ à divergence nulle.

La méthode d'obtention du champ scalaire ϕ sera discutée à la section 4.4. Mentionnons simplement pour le moment qu'en substituant l'équation (4.4) dans l'équation (4.3), on constate que ϕ et p sont reliés par la relation suivante:

$$p = \phi - \frac{\Delta t}{2} \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_j} \quad (4.5)$$

Toutes les dérivées spatiales sont calculées par une discrétisation centrée d'ordre 2 et les variables primitives u, v, w et p sont localisées sur un maillage décalé de

type MAC pour "Marker And Cell" développé par Harlow et Welch, 1965. Ce décalage des différentes variables permet de représenter adéquatement l'influence du champ de pression dans l'équation discrète du mouvement. La figure 4.1 illustre ce décalage spatial des composantes de vitesse définies sur les faces des cellules alors que la pression est localisée au centre des cellules. Cette disposition présente également l'avantage d'éviter la détermination des conditions frontières pour la pression puisque le point de calcul de ce paramètre n'est jamais localisé sur une frontière externe.

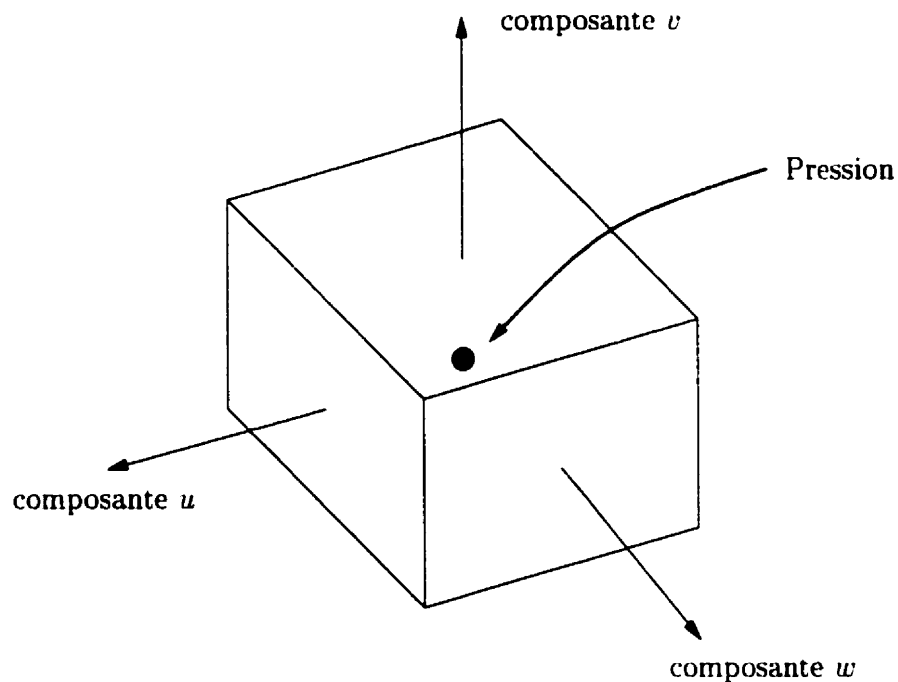


Figure 4.1 Maillage décalé: composantes de vitesse calculées aux centres des faces et calcul de la pression au centre de la cellule.

4.3 L'équation du mouvement

4.3.1 Conditions frontières pour le champ \hat{u}_i

La première des deux étapes présentées à la section 4.2 consiste à résoudre le champ intermédiaire \hat{u}_i dont la divergence n'est pas nulle. Pour ce faire, il faut connaître les conditions frontières associées au champ \hat{u}_i . Après chaque pas de temps, seules les conditions frontières pour le champ de vitesse u_i^{n+1} sont connues. Kim et Moin, 1985 ont bien démontré qu'il est erroné de poser que $u_i^{n+1}|_{C.F} = \hat{u}_i|_{C.F}$ puisque la méthode à pas fractionnaire devient alors inconsistante. En effet, une étude de raffinement de maillage sur un cas analytique montre que l'erreur globale augmente à mesure que le maillage se raffine. Pour déterminer les conditions frontières appropriées du champ intermédiaire \hat{u}_i , il suffit donc de le considérer comme étant une approximation de $u_i^*(\mathbf{x}, t_n + \Delta t)$ où le champ continu $u_i^*(\mathbf{x}, t)$ satisfait l'équation différentielle suivante:

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial t} = H_i^* + \nu \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^2} \quad (4.6)$$

où H_i^* est le terme de convection et où $u_i^*(\mathbf{x}, t_n) = u_i(\mathbf{x}, t_n)$ dans le terme de variation temporelle discret ($\partial u_i^* / \partial t = (u_i^*(\mathbf{x}, t_n + \Delta t) - u_i^*(\mathbf{x}, t_n)) / \Delta t$). L'équation (4.6) n'est rien d'autre que l'équation du mouvement sans le gradient de pression. En considérant le champ \hat{u}_i comme étant une approximation de $u_i^*(\mathbf{x}, t_n + \Delta t)$ et par un développement en série de Taylor, on obtient:

$$\begin{aligned} \hat{u}_i &\approx u_i^*(\mathbf{x}, t_n + \Delta t) \\ \hat{u}_i &= u_i^*(\mathbf{x}, t_n) + \Delta t \frac{\partial u_i^*}{\partial t} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial t^2} + \dots \end{aligned}$$

$$\hat{u}_i = u_i^*(\mathbf{x}, t_n) + \Delta t \left(H_i^* + \nu \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^2} \right) + O(\Delta t^2)$$

Étant donné que $u_i^*(\mathbf{x}, t_n) = u_i(\mathbf{x}, t_n)$, on peut donc écrire aussi:

$$\begin{aligned} \hat{u}_i &= u_i(\mathbf{x}, t_n) + \Delta t \left(H_i + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right) + O(\Delta t^2) \\ \hat{u}_i &= u_i(\mathbf{x}, t_n) + \Delta t \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) + O(\Delta t^2) \\ \hat{u}_i &= u_i(\mathbf{x}, t_n + \Delta t) + \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x_i} + O(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Selon la relation (4.7), les conditions frontières pour le champ intermédiaire \hat{u}_i sont précises à $O(\Delta t^2)$. Dans notre cas, le champ ϕ est obtenu explicitement à la place du paramètre de pression p . La relation (4.5) indique que $p = \phi + O(\Delta t)$ et donc qu'il est possible d'évaluer les conditions frontières pour \hat{u}_i sans calculer le champ de pression p tout en conservant la même précision. Nous obtenons donc l'expression recherchée:

$$\hat{u}_i|_{C.F} = u_i^{n+1}|_{C.F} + \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial \phi^n}{\partial x_i} \Big|_{C.F} \quad (4.8)$$

4.3.2 Résolution de l'équation du mouvement: factorisation approchée

Nous avons vu à la section 4.2 que la première des deux étapes de la résolution numérique de l'équation du mouvement consiste à déterminer le champ de vitesse intermédiaire \hat{u}_i par une technique de factorisation approchée. Cette technique est une généralisation de la méthode ADI (Alternating-Direction-Implicit) tel que mentionné par Peyret et Taylor, 1983. Reprenons l'équation (4.3) que l'on peut

tout d'abord reformuler de la manière suivante:

$$\left(1 - \frac{\nu\Delta t}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\nu\Delta t}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\nu\Delta t}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) (\hat{u}_i - u_i^n) = \frac{\Delta t}{2} (3H_i^n - H_i^{n-1}) + \nu\Delta t \left(\frac{\partial^2 u_i^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_i^n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_i^n}{\partial z^2} \right) \quad (4.9)$$

La factorisation approchée consiste à remplacer le membre de gauche de l'équation (4.9) par un produit de trois opérateurs:

$$\left(1 - \frac{\nu\Delta t}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \left(1 - \frac{\nu\Delta t}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \left(1 - \frac{\nu\Delta t}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) (\hat{u}_i - u_i^n) = F^n \quad (4.10)$$

où F^n correspond au membre de droite de l'équation (4.9). Cette factorisation peut maintenant être scindée en trois étapes successives:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\nu\Delta t}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \Delta \hat{u}_i^{**} &= F^n \\ \left(1 - \frac{\nu\Delta t}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \Delta \hat{u}_i^* &= \Delta \hat{u}_i^{**} \\ \left(1 - \frac{\nu\Delta t}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \Delta \hat{u}_i &= \Delta \hat{u}_i^* \end{aligned} \quad (4.11)$$

où $\Delta \hat{u}_i = (\hat{u}_i - u_i^n)$. La résolution de chacune de ces trois étapes s'effectue par l'inversion d'un système tridiagonal plutôt que par celle d'un système matriciel avec large bande diagonale tel que celui qui résulterait de la discrétisation de la relation (4.9). L'algorithme de Thomas est employé pour résoudre les différents systèmes tridiagonaux que l'on retrouve dans (4.11).

La technique de factorisation approchée permet de faire des économies importantes en temps de calcul et en mémoire requise pour la résolution d'écoulements tridimensionnels bien qu'elle engendre cependant un nombre de termes supérieur à celui qui résulterait de l'utilisation directe de la relation (4.9). Néanmoins, on peut facilement démontrer que l'erreur commise lors de la factorisation approchée est $O(\Delta t^2)$ et qu'elle ne modifie donc pas l'ordre de précision du schéma temporel qui est également $O(\Delta t^2)$. Mentionnons que puisque les quantités intermédiaires $\Delta \hat{u}_i^*$ et $\Delta \hat{u}_i^{**}$ du système d'équations (4.11) n'ont aucune signification physique, les conditions frontières associées à ces quantités intermédiaires doivent donc être exprimées en fonction de $\Delta \hat{u}_i$. En utilisant le système (4.11), on peut facilement obtenir les conditions frontières pour $\Delta \hat{u}_i^*$ et $\Delta \hat{u}_i^{**}$:

$$\Delta \hat{u}_i^*|_{C.F} = \left(1 - \frac{\nu \Delta t}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \Delta \hat{u}_i|_{C.F} \quad (4.12)$$

$$\Delta \hat{u}_i^{**}|_{C.F} = \left(1 - \frac{\nu \Delta t}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \left(1 - \frac{\nu \Delta t}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \Delta \hat{u}_i|_{C.F} \quad (4.13)$$

4.4 L'équation de Poisson pour la pression

4.4.1 Obtention de l'équation de Poisson

À la section 4.2, nous avons présenté la méthode à pas fractionnaire qui fait intervenir le champ de vitesse intermédiaire \hat{u}_i . Ce champ ne satisfait pas l'équation de continuité et nécessite donc une certaine correction. Cette correction consiste à projeter le champ \hat{u}_i dans l'espace à divergence nulle pour obtenir u_i^{n+1} . Pour ce

faire, il suffit d'appliquer la relation (4.4):

$$u_i^{n+1} = \hat{u}_i - \underbrace{\frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial x_i}}_{\text{correction}}$$

où l'on aura auparavant déterminé le champ scalaire ϕ en appliquant l'opérateur divergence de part et d'autre de cette dernière équation:

$$\underbrace{\frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x_i}}_{\text{continuité} = 0} = \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_i} - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial^2 \phi^{n+1}}{\partial x_i \partial x_i} \quad (4.14)$$

Puisque le membre de gauche de l'équation (4.14) correspond à l'équation de continuité pour un fluide incompressible, on peut écrire ainsi l'équation de Poisson correspondant au champ scalaire ϕ :

$$\frac{\partial^2 \phi^{n+1}}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\rho}{\Delta t} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_i} \quad (4.15)$$

La résolution de cette équation pour le champ ϕ permet ensuite de corriger le champ intermédiaire \hat{u}_i et d'obtenir ainsi le champ u_i^{n+1} . Selon Gresho et Sani, 1987, une condition frontière de type Neumann constitue le choix le plus naturel pour l'équation de Poisson (4.15). Pour l'obtenir, il suffit d'appliquer la composante normale de l'équation du mouvement à la frontière considérée. On obtient donc la condition de Neumann suivante:

$$\left. \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial x_i} \right|_{\Gamma} = \frac{\rho}{\Delta t} (\hat{u}_i - u_i^{n+1})|_{\Gamma} \quad (4.16)$$

où Γ représente une frontière externe. Il est bien connu qu'un problème de Neumann, l'équation (4.15) associée aux conditions frontières (4.16), est contraint à une condition de compatibilité. Cette condition exprime la conservation globale de la masse. En d'autres mots, il faut que la résultante des flux massiques sur toutes les frontières externes du domaine de calcul soit nulle. Cette condition de compatibilité, obtenue en appliquant le théorème de la divergence à l'équation de Poisson (4.15), s'écrit de la manière suivante:

$$\int_V \frac{\partial^2 \phi^{n+1}}{\partial x_i \partial x_i} dV = \int_S \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial n} dS \quad (4.17)$$

où V est le volume global du domaine de l'écoulement et S les surfaces externes. Il est primordial que la discrétisation des équations respecte cette condition de compatibilité pour assurer la convergence de la solution numérique du champ ϕ . Tel que mentionné par Fletcher, 1991, la convergence de la solution itérative de l'équation de Poisson avec conditions frontières de Neumann est beaucoup plus lente que si les conditions de Dirichlet étaient utilisées. Néanmoins, l'utilisation des conditions de Neumann est recommandée pour deux raisons. Premièrement, il n'est pas naturel de spécifier une condition frontière de Dirichlet pour la pression. Deuxièmement, la condition de compatibilité (4.17) n'est satisfaite exactement que si on impose des conditions de Neumann et déterminées à l'aide de la composante normale de l'équation du mouvement sur toutes les frontières externes du domaine. Gresho et Sani, 1987 présentent une discussion intéressante sur l'importance du choix approprié des conditions frontières à imposer lors de la résolution de l'équation de Poisson pour la pression.

4.4.2 Résolution de l'équation de Poisson

La résolution de l'équation de Poisson avec des conditions de Neumann constitue un problème difficile à résoudre numériquement puisqu'elle engendre un système possédant une infinité de degrés de liberté. En fait, on obtient un système d'équations dont la matrice des opérateurs linéaires est singulière. La solution du problème de Neumann est unique à une constante près puisque la pression n'apparaît que sous la forme d'un gradient. Pour éliminer la singularité du problème, il suffit donc d'imposer une certaine valeur du champ ϕ à un point donné du domaine. Ceci illustre bien le caractère relatif de la pression: en effet, dans l'équation de Navier-Stokes, la valeur absolue du champ de pression n'a aucune importance puisque seules les variations spatiales de pression ont un sens physique étant donné qu'elles représentent une force agissant sur le fluide.

Une autre difficulté de la résolution de l'équation de Poisson associée à des conditions de Neumann réside dans le fait que la matrice des opérateurs linéaires est mal conditionnée². En effet, la presque totalité des lignes de cette matrice n'est pas à diagonale dominante ce qui résulte en un faible taux de convergence si l'on utilise une méthode itérative de résolution. On peut finalement se demander: *quelle est donc la meilleure méthode de résolution pour l'équation de Poisson?*

Pour trancher cette question, il faut déterminer une méthode de résolution efficace qui minimise le temps de calcul et l'espace mémoire requis. Au début de l'élaboration du code, nous avons choisi d'utiliser la méthode directe de décomposition LU optimisée offerte par la bibliothèque de programmes SuperLU développée par Demmel *et al.*, 1997. Ces derniers ont conçu une structure permettant de ne

²La matrice est mal conditionnée même si l'on a spécifié une valeur du champ ϕ à un point du domaine.

conserver en mémoire que les termes non nuls. Cette méthode permet d'obtenir efficacement la résolution de l'équation de Poisson pour des problèmes d'écoulements bidimensionnels. Pour des cas tridimensionnels, par contre, la décomposition LU requiert énormément de mémoire car elle provoque un remplissage de la matrice même si cette dernière était creuse avant décomposition. L'exemple suivant illustre l'ordre de grandeur de la mémoire ainsi requise: une simulation effectuée sur une marche descendante laminaire avec un maillage de $80 \times 32 \times 32$ (81920 cellules) a nécessité environ 3.2 Gigaoctets de mémoire en double précision. Il était donc clair que l'utilisation de la méthode de décomposition LU est très inefficace pour des problèmes tridimensionnels.

Les méthodes itératives constituent donc le choix le plus approprié pour résoudre de grands systèmes linéaires avec matrice creuse. En effet, avec ce type de méthodes, on ne stocke en mémoire que les coefficients non nuls. Dans le cadre ce travail, la méthode stabilisée de gradient biconjugué avec préconditionneur a été choisie pour résoudre l'équation de Poisson. Le préconditionneur permet de bien conditionner la matrice des opérateurs linéaires afin de diminuer le nombre d'itérations nécessaires et d'assurer une solution numérique précise. Typiquement, une factorisation incomplète $ILU(1)$ est utilisée comme préconditionneur. La bibliothèque de programmes SPLIB développée par Bramley et Wang, 1997 donne accès à un ensemble de méthodes itératives et de méthodes de préconditionnement. L'utilisation de SPLIB pour la simulation numérique de la marche descendante laminaire de l'exemple précédent avec un maillage composé d'un nombre identique de cellules ne requiert alors que 38 Mégaoctets de mémoire. On constate un gain en mémoire d'un facteur 80. Il est donc évident que l'utilisation de la méthode stabilisée de gradient biconjugué avec préconditionneur est un choix judicieux pour minimiser la mémoire requise lors de la résolution de l'équation de Poisson. Par contre, en utilisant la bibliothèque SPLIB, il s'avère que le temps de CPU nécessaire pour résoudre l'équation

de Poisson est très long pour des écoulements turbulents tridimensionnels où une grande finesse du maillage est requise pour représenter adéquatement les grandes échelles tourbillonnaires.

Dans le but de diminuer le temps de calcul et donc d'augmenter l'efficacité du code, nous avons opté pour l'utilisation de la bibliothèque de programmes ASL ("Advance Scientific Library") développée par la compagnie "NEC Corporation". Cette bibliothèque offre une vaste gamme de méthodes itératives optimisées et vectorisées pour les machines vectorielles³ telle le super-calculateur NEC-SX5 dont la vitesse théorique est de 4 Gigaflops⁴. Plusieurs simulations numériques de la marche descendante précédente où l'on a mesuré le temps de CPU requis pour résoudre l'équation de Poisson pour la pression ont été réalisées. On a ainsi comparé plusieurs versions de méthodes de gradient biconjugué utilisant différents types de stockage de la matrice principale et différents types de préconditionneur. Cette expérience numérique a démontré que la méthode stabilisée de gradient biconjugué avec un préconditionneur de type *MILU* pour "Multicolor ILU" et en utilisant un stockage de la matrice principale de type tridimensionnel à 7 points est une combinaison très efficace pour minimiser le temps de CPU requis. En effet, l'équation de Poisson est résolue à une vitesse de 2.7 Gigaflops en un temps 15 fois inférieur à celui qui est nécessaire en utilisant SPLIB.

Ce résultat nous a motivé à vectoriser la totalité des sous-routines du code de calcul afin d'obtenir un gain de temps précieux. Cette vectorisation du programme et l'utilisation de la méthode stabilisée de gradient biconjugué offerte par la biblio-

³Le calcul vectoriel traite les instructions comme sur une chaîne de montage. Il y a donc un partage des opérations à effectuer simultanément entre les différents étages d'unités de traitement du processeur.

⁴Un flop représente le nombre d'opérations (addition ou multiplication de nombres réels) effectuées par seconde. Ainsi, une capacité de 4 Gigaflops représente une vitesse de calcul de 4 milliards d'opérations par seconde.

thèque ASL a permis de réduire le temps requis d'un facteur 20 par rapport à la version séquentielle⁵ du code de calcul.

4.5 Discussion sur le schéma numérique utilisé

À la section 4.2, nous avons mentionné que nous utilisons un schéma implicite de Crank-Nicolson pour résoudre les termes de diffusion de l'équation du mouvement. Ce caractère implicite élimine toute contrainte de stabilité numérique visqueuse. Cette contrainte de stabilité, normalement mesurée par le nombre de diffusion d où $d = \nu \Delta t / \Delta y^2$, est particulièrement sévère près des parois solides où les cellules du maillage sont généralement très fines afin de bien représenter les gradients élevés de vitesse caractérisant ces régions. Ainsi, la partie implicite du code de calcul permet d'obtenir un schéma inconditionnellement stable.

Les termes de convection, non linéaires, sont quant à eux traités explicitement par un schéma d'Adams-Bashforth. Ce choix impose donc une restriction sur le nombre de convection c que l'on peut employer lors d'une simulation numérique où $c = u \Delta t / \Delta x$. Dans le domaine des méthodes numériques, ce nombre de convection est couramment désigné *nombre de CFL* en l'honneur des scientifiques Courant, Friedrichs et Lewy (1928). En général, une condition nécessaire de stabilité du calcul numérique impose que le nombre de *CFL* soit inférieur à 1. Dans notre cas, le critère de stabilité *CFL* à respecter est très difficile à déterminer puisque le schéma d'Adams-Bashforth appliqué à une équation de convection pure (viscosité nulle) est strictement instable. Or, le schéma d'Adams-Bashforth appliqué à une équation de convection-diffusion telle que l'équation de Navier-Stokes pour les termes de convection est conditionnellement stable. Le critère de stabilité *CFL* est donc

⁵Le calcul séquentiel signifie que l'ordinateur traite les instructions les unes après les autres.

dépendant de la présence des termes de diffusion et du nombre de Reynolds de l'écoulement. Peyret et Taylor, 1983 ont montré qu'il est néanmoins possible de déterminer une courbe de stabilité à l'aide de calculs numériques pour une équation de convection-diffusion en 1D où les schémas d'Adams-Bashforth et de Crank-Nicolson sont utilisés respectivement pour les termes de convection et de diffusion. Le graphique présenté à la figure 4.2 illustre la courbe du nombre de diffusion en fonction du nombre de CFL qui délimite les zones de stabilité et d'instabilité de la solution de l'équation de convection-diffusion en 1D. Cette courbe indique clairement que pour un $CFL \leq 0.5$, la solution numérique est stable sans véritable restriction sur le nombre de diffusion. Des expériences numériques effectuées avec notre code pour des écoulements tridimensionnels ont corroboré cette conclusion.

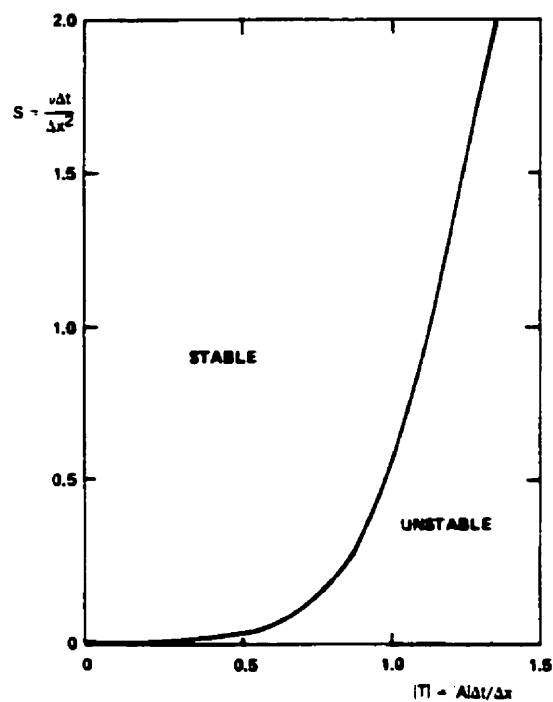


Figure 4.2 Courbe de stabilité de l'équation de convection-diffusion employant respectivement les schémas d'Adams-Bashforth et de Crank-Nicolson pour les termes de convection et de diffusion. Nombre de diffusion en ordonnée et nombre de convection en abscisse. Extrait de Peyret et Taylor, 1983.

4.6 Résumé de l'algorithme numérique utilisé

Un résumé de l'algorithme numérique employé dans notre code lors de la résolution des équations de continuité et de Navier-Stokes pour la simulation des grandes échelles permet d'avoir un aperçu des différentes opérations numériques à effectuer dans le code. L'ensemble de ces opérations a été vectorisé afin d'obtenir un code de calcul très performant en terme de temps de calcul sur le calculateur NEC-SX5. L'algorithme de calcul comprend les étapes suivantes:

- *Avancement en temps* $\Rightarrow t = t + \Delta t$;
- *Détermination des conditions frontières du champ intermédiaire \hat{u}_i* \Rightarrow voir l'équation (4.8);
- *Calcul de la viscosité turbulente de sous-maille ν_i^n* \Rightarrow fonction du modèle de sous-maille utilisé (chapitre 3);
- *Calcul des contraintes de sous-maille τ_{ij}^n* \Rightarrow fonction du modèle de sous-maille utilisé (chapitre 3);
- *Résolution du champ intermédiaire \hat{u}_i* \Rightarrow voir l'équation (4.11);
- *Résolution de l'équation de Poisson ϕ^{n+1}* \Rightarrow voir l'équation (4.15);
- *Mise à jour du champ de vitesse pour obtenir u_i^{n+1}* \Rightarrow voir l'équation (4.4);
- *Mise à jour des différents champs:*

$$\begin{aligned} u_i^{n-1} &\leftarrow u_i^n \\ u_i^n &\leftarrow u_i^{n+1} \\ \tau_{ij}^{n-1} &\leftarrow \tau_{ij}^n \end{aligned}$$

- *Vérification de l'obtention du critère d'arrêt⁶. Sinon passer au prochain pas de temps.*

⁶Le critère d'arrêt consiste à vérifier que les solutions obtenues pour le champ moyen de vitesse, l'énergie cinétique de turbulence et la longueur de recirculation ont convergé.

CHAPITRE 5

VÉRIFICATION ET VALIDATION DU CODE

5.1 Introduction

Au chapitre 4, nous avons présenté la méthode numérique utilisée pour simuler les grandes échelles d'un écoulement turbulent. Comme le fait remarquer Roache, 1998, à partir de l'instant où la programmation de l'algorithme numérique est complétée, il faut vérifier le code numérique puis le valider. Ceci nous amène à définir les notions de vérification et de validation. Selon Roache, 1998, la vérification d'un code est reliée à la résolution adéquate des équations différentielles. En d'autres termes, la vérification consiste à se poser la question suivante: *Est-ce que l'on résout adéquatement les équations d'un point de vue numérique?* Pour répondre à cette question, il suffit de s'assurer que l'algorithme numérique programmé respecte notamment la propriété de convergence pour un cas analytique. La convergence implique que la solution numérique s'approche de la solution exacte d'une équation différentielle lorsque la discrétisation spatiale Δx_i et temporelle Δt tendent vers zéro. Autrement dit, il faut effectuer une étude de raffinement de maillage et du pas de temps. Quant à la notion de validation du code de calcul, cette dernière fait intervenir la question suivante: *Est-ce que les équations différentielles représentent fidèlement la physique du problème étudié?* Dans ce cas, la validation consiste tout simplement à comparer les résultats numériques avec les valeurs expérimentales d'un problème.

Ce chapitre présente donc la vérification et la validation du code de calcul élaboré dans ce travail. Pour ce faire, on simule l'écoulement de deux cas-tests. Le premier

est le cas analytique tridimensionnel de Ethier et Steinman, 1994 permettant de vérifier la méthode numérique et par le fait même d'établir l'ordre du schéma utilisé. Le deuxième cas-test est celui de l'écoulement laminaire d'une marche descendante réalisé expérimentalement par Armaly *et al.*, 1983 qui permettra de valider les résultats obtenus numériquement avec notre code nommé DFMAC¹. Ces étapes de vérification et de validation sont essentielles avant même d'entamer la simulation numérique d'écoulements turbulents.

5.2 Cas analytique de Ethier et Steinman, 1994

Dans leurs travaux, Ethier et Steinman, 1994 ont développé plusieurs familles de solutions analytiques respectant les équations tridimensionnelles et instationnaires de Navier-Stokes. Ces solutions analytiques sont spécifiques pour un écoulement incompressible et pour une géométrie cartésienne.

Le domaine de calcul du cas-test correspond à un cube de deux unités de côté: $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$ et $0 \leq z \leq 2$. Les différents champs analytiques des composantes de vitesse et de la pression ont la forme suivante:

$$u_{exacte} = -a [e^{ax} \sin(ay + dz) + e^{az} \cos(ax + dy)] e^{-d^2 t} \quad (5.1)$$

$$v_{exacte} = -a [e^{ay} \sin(az + dx) + e^{ax} \cos(ay + dz)] e^{-d^2 t} \quad (5.2)$$

$$w_{exacte} = -a [e^{az} \sin(ax + dy) + e^{ay} \cos(az + dx)] e^{-d^2 t} \quad (5.3)$$

¹Rappelons que cet acronyme est employé pour spécifier que le code de calcul utilise une méthode de discrétisation de Différences Finies et que les variables primitives u , v , w et p sont localisées sur un maillage décalé de type MAC

$$p_{exacte} = -\frac{a^2}{2} \left[e^{2ax} + e^{2ay} + e^{2az} + 2\sin(ax + dy)\cos(az + dx)e^{a(y+z)} + \right. \\ \left. 2\sin(ay + dz)\cos(ax + dy)e^{a(z+x)} + 2\sin(az + dx)\cos(ay + dz)e^{a(x+y)} \right] e^{-2a^2 t} \quad (5.4)$$

où les constantes réelles a et d ont été sélectionnées à $a = \pi/4$ et $d = \pi/2$. Les champs analytiques ont été déterminés pour établir un équilibre entre les termes de convection et celui de gradient de pression, et entre le terme temporel et les termes de diffusion de l'équation de Navier-Stokes. Ces champs analytiques ont de plus été développés pour satisfaire l'équation de continuité: leur divergence respective est donc nulle. Ce cas analytique correspond à l'évolution temporelle et spatiale de tourbillons dont l'intensité décroît dans le temps de façon exponentielle. La résolution numérique de ce problème transitoire s'effectue en spécifiant tous les champs exacts initiaux à $t = 0$. La simulation de l'écoulement s'effectue jusqu'à $t = 0.1s$ qui correspond à une décroissance de l'intensité tourbillonnaire de l'ordre de 22% de l'intensité initiale.

Comme mentionné dans l'introduction de ce chapitre, la vérification de la méthode numérique s'effectue tout d'abord en réalisant une étude de convergence de maillage. On veut donc vérifier la convergence du code de calcul. La notion de convergence numérique est directement liée à l'évolution de l'erreur exacte pour différents maillages donnés. Une méthode numérique est dite convergente lorsque, pour une taille de maillage de plus en plus petite, l'erreur exacte tend vers zéro. Pour calculer l'erreur exacte, on utilise la norme L_2 pour les différents champs u , v , w et p . L'expression de l'erreur exacte est donnée par:

$$E_\phi = \|\phi_{exacte} - \phi_i\|_{L_2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\phi_{exacte} - \phi_i)^2}{N}} \quad (5.5)$$

où ϕ_{exacte} et ϕ_i sont respectivement les champs exact et numérique et où N est le nombre de points de maillage. L'ordre du schéma numérique est évalué en calculant l'erreur globale exacte des champs u , v , w et p sur quatre maillages différents. La discrétisation spatiale de ces quatre maillages est de $10 \times 10 \times 10$ cellules, $20 \times 20 \times 20$ cellules, $30 \times 30 \times 30$ cellules et $40 \times 40 \times 40$ cellules.

Cependant pour un problème transitoire, il ne suffit pas uniquement d'effectuer un raffinement spatial pour mesurer l'ordre de la méthode numérique. En effet, il faut également raffiner le pas de temps pour tenir compte de l'erreur de troncature qui est également liée à la discrétisation temporelle. Pour ce faire, on conserve le nombre de Courant² constant d'un maillage à l'autre. De cette manière, si la taille du maillage diminue d'un facteur deux alors le pas de temps doit également diminuer d'un même facteur. Précisons que pour des raisons de stabilité numérique, on s'assure que le nombre de Courant soit inférieur à 0.5 pour toutes les simulations. Le tableau 5.1 présente l'erreur globale exacte des différents champs pour les quatre maillages utilisés.

Tableau 5.1 Évolution de l'erreur globale à $t = 0.1s$ pour les différents champs u , v , w et p .

Maillage	Erreur u	Erreur v	Erreur w	Erreur p
$10 \times 10 \times 10$	1.04×10^{-2}	1.03×10^{-2}	1.03×10^{-2}	2.31×10^{-1}
$20 \times 20 \times 20$	2.69×10^{-3}	2.63×10^{-3}	2.65×10^{-3}	6.82×10^{-2}
$30 \times 30 \times 30$	1.22×10^{-3}	1.18×10^{-3}	1.19×10^{-3}	3.28×10^{-2}
$40 \times 40 \times 40$	6.96×10^{-4}	6.67×10^{-4}	6.73×10^{-4}	1.97×10^{-2}

La figure 5.1 illustre l'évolution du logarithme des erreurs³ en fonction du loga-

²Rappelons que le nombre de Courant est proportionnel au pas de discrétisation temporelle Δt et inversement proportionnel au pas de discrétisation spatiale Δx .

³Seule l'erreur exacte sur la composante u est illustrée sur la figure 5.1 car l'erreur est pra-

rithme de la taille du maillage. Le calcul de la pente de ces droites donne l'ordre

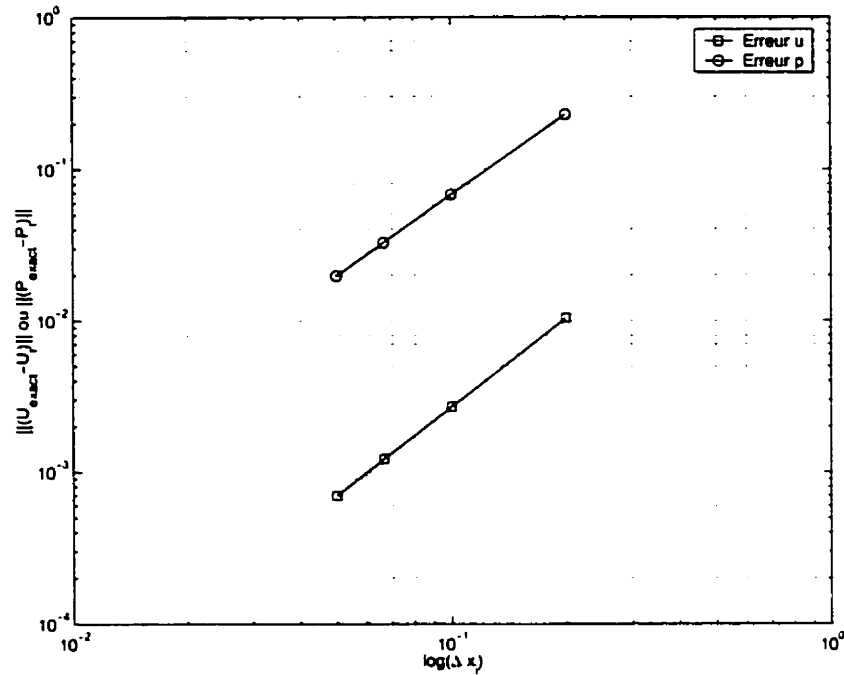


Figure 5.1 Évolution de l'erreur exacte en fonction de la taille du maillage pour le cas analytique de Ethier et Steinman, 1994.

du schéma numérique. Ce calcul des pentes montre clairement que le schéma est bien d'ordre deux en temps et en espace. Étant donné les schémas de discrétisation employés dans le code de calcul et que nous avons décrits au chapitre 4, cette valeur de l'ordre correspond bel et bien à celle que nous nous attendions. Cette étude de convergence démontre également que la méthode numérique est consistante car plus le pas de discrétisation spatiale et temporelle diminue, plus l'erreur exacte diminue.

La figure 5.2 présente l'allure du champ de vitesse tridimensionnel à $t = 0.1s$ pour le cas analytique de Ethier et Steinman, 1994. Pour une question de visibilité des vecteurs vitesse, seuls les vecteurs sur les faces externes sont montrés. Comme on

tiquement la même pour les composantes v et w .

peut le remarquer, ce champ de vitesse est complexe car une série de tourbillons se développant dans les trois directions de l'espace sont présents dans l'écoulement. La réussite de la simulation de ce cas analytique complexe s'avère décisive pour la vérification du code numérique.

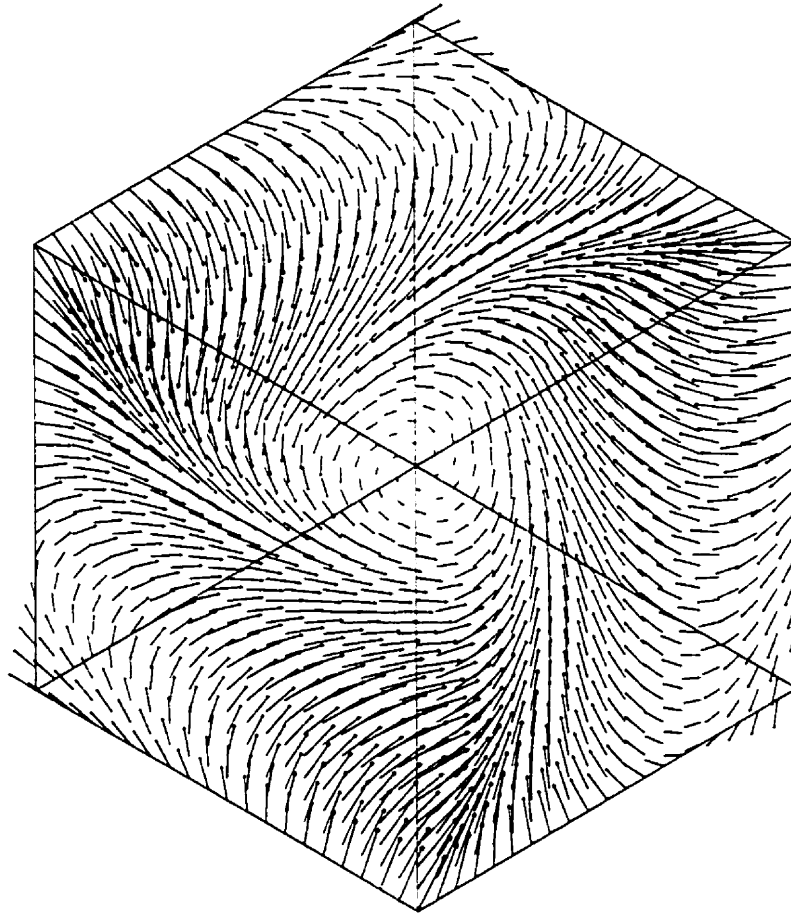


Figure 5.2 Vecteurs vitesses à $t = 0.1s$ pour le cas analytique de Ethier et Steinman, 1994. Cas où le maillage comporte $20 \times 20 \times 20$ cellules.

5.3 Marche descendante d'Armaly *et al.*, 1983

Armaly *et al.*, 1983 ont mesuré expérimentalement les différentes caractéristiques de l'écoulement derrière une marche descendante, c'est-à-dire un canal présentant une expansion soudaine. Pour ce faire, ils ont recueilli des mesures permettant d'observer les régimes d'écoulement laminaire, de transition et turbulent pour une grande plage de nombres de Reynolds. La validation de notre code de calcul s'effectue avec les données expérimentales correspondant au régime laminaire. La figure 5.3 définit les différents paramètres de cet écoulement. Cette configu-

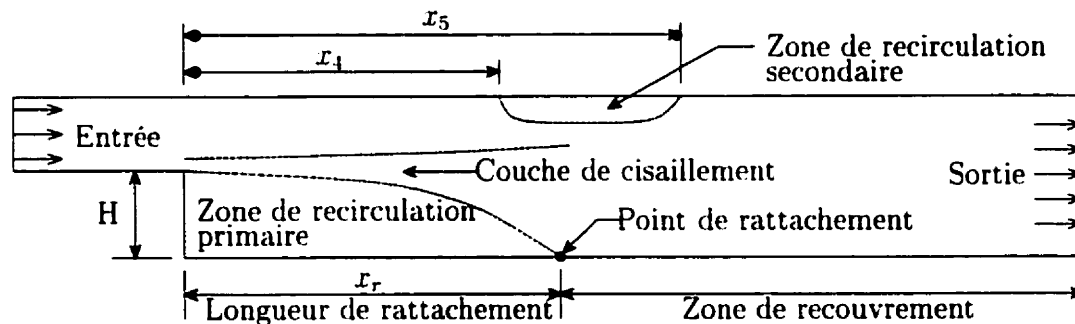


Figure 5.3 Configuration de la marche d'Armaly *et al.*, 1983 et des différents paramètres de l'écoulement.

ration favorise le développement de gradients de pression adverses⁴. Au niveau de l'expansion, une couche de cisaillement engendrée par la différence de vitesses qu'expérimente le fluide selon la direction verticale, prend naissance et se développe spatialement. Elle interagit avec la zone de recirculation primaire qui prend forme au niveau de la paroi inférieure. Cette zone de recirculation est caractérisée par un paramètre important nommé longueur de rattachement. L'obtention de ce paramètre par un code numérique est décisive puisqu'au niveau de la recirculation primaire et du point de rattachement du fluide, l'écoulement expérimente de forts

⁴Adverse signifie que le gradient de pression est positif. Ce qui veut dire que le gradient de pression s'oppose au mouvement naturel du fluide vers l'aval.

gradients de pression adverses. Au-delà du point de rattachement, l'écoulement tend à se développer avec un gradient de pression négatif comme c'est le cas dans un canal régulier. Cette partie de la marche est appelée zone de recouvrement. Pour certains nombres de Reynolds, Armaly *et al.*, 1983 ont observé une zone de recirculation secondaire au niveau de la paroi supérieure de la marche. Généralement, les codes de résolution comportant une diffusion numérique excessive engendrent une longueur de rattachement plus courte que celle prévue expérimentalement. Ainsi, le phénomène de gradient de pression adverse, de risque de diffusion numérique et la présence d'une seconde zone de recirculation font de cette configuration un cas-test probant pour la validation de notre code numérique.

La première partie de la validation consiste à comparer les différentes distributions du profil de vitesse axiale obtenues numériquement avec celles des mesures expérimentales. Dans ce cas, le nombre de Reynolds, basé sur la vitesse moyenne et le diamètre hydraulique du canal d'entrée, a été fixé à 389. Un profil de vitesse parabolique a été imposé à l'entrée de la marche descendante comme dans l'expérience d'Armaly *et al.*, 1983. Des conditions de Neumann ont été sélectionnées pour les composantes de vitesse u , v et w à la frontière de sortie de l'écoulement qui a été placée à la position longitudinale $x_{sortie}/H = 30$. La dimension de la marche utilisée dans la direction de l'envergure correspond à celle employée dans l'expérience. La condition de non-glissement a été imposée à toutes les parois solides de la marche, c'est-à-dire aux parois inférieure, supérieure et latérales. Pour l'ensemble des simulations numériques effectuées, le pas de temps a été sélectionné pour assurer un nombre de Courant inférieur à 0.5. La figure 5.4 montre les résultats obtenus aux positions longitudinales $x/H = 3.57, 4.80, 6.12$ et 11.84^5 avec l'utilisation d'un maillage comportant $80 \times 52 \times 32$ cellules uniformes dans la direc-

⁵Ces positions longitudinales sont prises sur le plan central de la marche.

tion longitudinale, verticale et de l'envergure. On constate que les prédictions du code de calcul sont excellentes pour toutes les positions longitudinales se situant à l'intérieur de la zone de recirculation (les positions $x/H = 3.57$, 4.80 et 6.12) et celle correspondant à la zone de recouvrement (la position $x/H = 11.84$). Pour cette simulation, la longueur de rattachement prévue par le code de calcul est de $8.5H$, valeur qui est identique à celle obtenue expérimentalement.

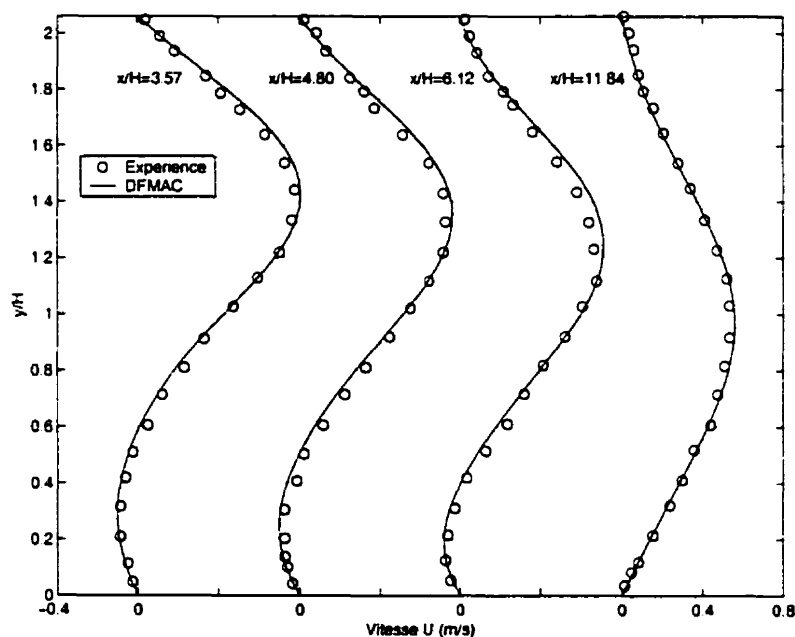


Figure 5.4 Comparaison des résultats numériques obtenus avec les mesures expérimentales d'Armaly *et al.*, 1983: profil de vitesse à différentes positions longitudinales de la marche descendante où $Re = 389$. Maillage utilisé: $80 \times 52 \times 32$ cellules.

La deuxième partie de l'étape de validation du code de calcul consiste à simuler l'écoulement laminaire de la marche descendante pour différents nombres de Reynolds et à mesurer la longueur de rattachement x_r de la zone de recirculation primaire. Le maillage utilisé pour les situations où le nombre de Reynolds est inférieur à 389 est de $80 \times 52 \times 32$ cellules uniformes. Pour les cas où le nombre de

Reynolds est supérieur à 389, un maillage uniforme de $160 \times 54 \times 32$ cellules a été utilisé. La figure 5.5 présente la distribution de la longueur de rattachement pour la zone de recirculation primaire en fonction du nombre de Reynolds. Sur cette figure, on illustre également la prédiction numérique de x_r obtenue par le code "TEACH" qu'Armaly *et al.*, 1983 ont utilisé pour évaluer l'exactitude de leurs mesures expérimentales. On remarque que les valeurs numériques obtenues avec notre code sont très proches des valeurs expérimentales et bien meilleures que celles prédites par Armaly *et al.*, 1983. Ces écarts importants entre les valeurs expérimentales et celles prévues par le code "TEACH" s'expliquent par le fait que ce code comporte de la viscosité artificielle⁶ due à la discrétisation de type "upwinding" utilisée pour les termes de convection de l'équation du mouvement. Dans notre cas, le code de calcul emploie une discrétisation centrée, ce qui engendre un schéma de discrétisation dépourvu de toute viscosité artificielle. On remarque par ailleurs qu'il existe une différence entre l'expérience et notre estimation de x_r à partir de $Re=600$. Pour $Re=800$, la valeur prédite par le code de calcul est approximativement $12.56H$ alors qu'expérimentalement on trouve plutôt $14H$. Pour remédier à cette situation, nous avons simulé ce cas en utilisant un maillage beaucoup plus fin de $180 \times 56 \times 32$ cellules et une loi de concentration hyperbolique pour la spécification de la densité du maillage dans la direction verticale près des parois solides et dans la couche de cisaillement. En raffinant ainsi le maillage, nous obtenons une longueur de rattachement de $13.1H$ se rapprochant de la valeur expérimentale de $14H$. On conclut donc que les écarts présents à la figure 5.5 entre nos prédictions et les valeurs expérimentales dépendent simplement de la densité du maillage utilisé. En augmentant encore davantage la densité du maillage utilisé, le résultat obtenu avec notre code serait certainement encore meilleur. Soulignons cependant que, pour

⁶La viscosité artificielle accroît le phénomène de diffusion entre la couche de cisaillement et la zone de recirculation primaire. Le taux d'épanouissement de la couche de cisaillement étant alors plus important, il résulte que la longueur de rattachement est plus courte.

cette étape de validation du code de calcul, on cherche plutôt à nous assurer que les prédictions numériques sont bonnes et que nous nous approchons bel et bien des valeurs expérimentales en raffinant le maillage.

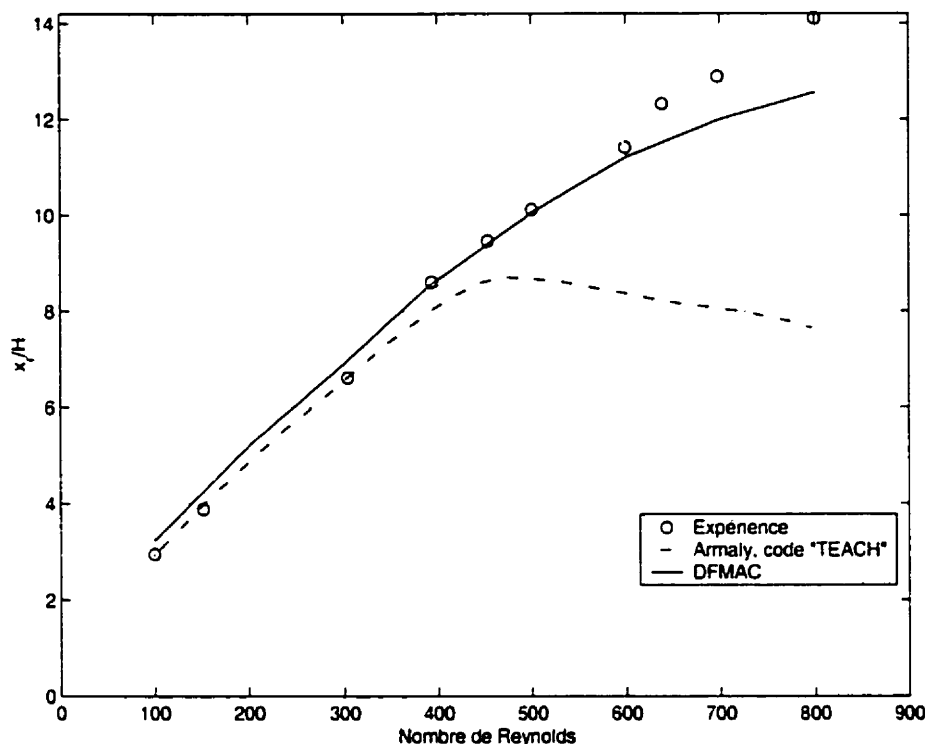


Figure 5.5 Comparaison des résultats numériques obtenus avec les mesures expérimentales d'Armaly *et al.*, 1983: longueur de rattachement x_r en fonction du nombre de Reynolds. Maillage de $80 \times 52 \times 32$ cellules pour $Re \leq 389$ et de $160 \times 54 \times 32$ cellules pour $Re > 389$.

À partir de $Re=400$, Armaly *et al.*, 1983 ont observé la présence d'une zone de recirculation secondaire au niveau de la paroi supérieure de la marche que l'on caractérise par les positions x_4 et x_5 délimitant le début et la fin de cette zone (voir la figure 5.3). La figure 5.6 présente les positions délimitant la zone de recirculation secondaire pour $Re > 400$. On constate une très bonne concordance entre les valeurs numériques et celles de l'expérience. Ceci démontre l'excellente aptitude de notre

code de calcul à représenter fidèlement les différents phénomènes physiques présents à l'intérieur de la marche descendante.

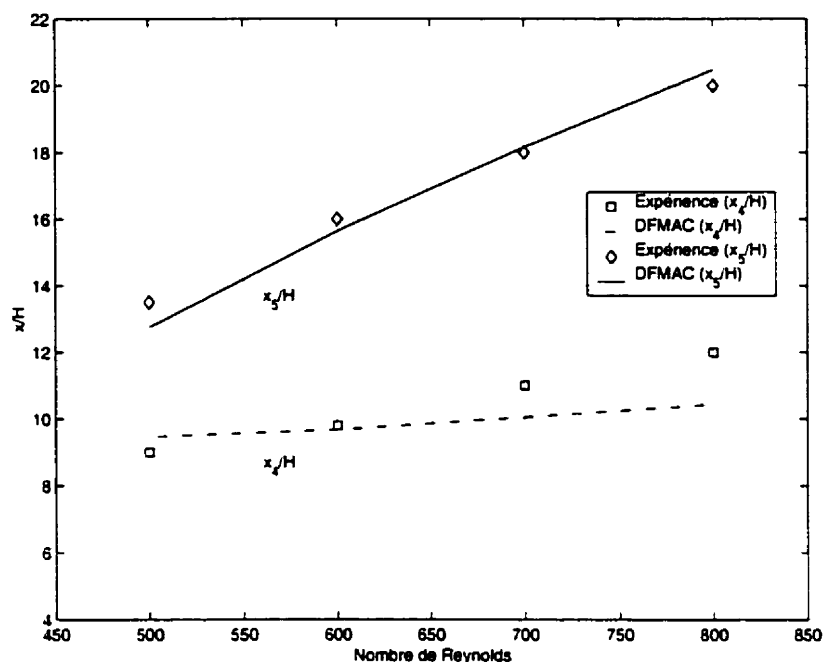


Figure 5.6 Comparaison des résultats numériques obtenus avec les mesures expérimentales d'Armaly *et al.*, 1983: position marquant le début x_4 et la fin x_5 de la zone de recirculation secondaire en fonction du nombre de Reynolds.

Finalement, la figure 5.7 montre les isovaleurs de la composante de vitesse u pour le cas où $Re=800$ sur le plan central vertical de la marche. Cette figure, représente bien la zone de recirculation primaire se développant au niveau de la paroi inférieure et la zone de recirculation secondaire au niveau de la paroi supérieure.



Figure 5.7 Isovaleurs de la composante de vitesse axiale u à $Re=800$.

On vient de présenter dans ce chapitre, les étapes de vérification et de validation du code de calcul pour un écoulement laminaire, étapes essentielles avant d'aborder la simulation numérique de la turbulence. L'étape de vérification a démontré que la méthode numérique employée est convergente et présente une erreur de second ordre relative aux discrétisations spatiale et temporelle. Par la suite, la simulation tridimensionnelle de l'écoulement laminaire à l'intérieur d'une marche descendante a permis de valider et de mettre en évidence l'excellente capacité du code numérique à représenter adéquatement tous les phénomènes physiques présents. Au prochain chapitre, on simulera donc les grandes échelles instationnaires et tridimensionnelles de l'écoulement turbulent de la marche descendante d'Eaton, 1980.

CHAPITRE 6

SIMULATION TRIDIMENSIONNELLE DE L'ÉCOULEMENT TURBULENT DERRIÈRE UNE MARCHE DESCENDANTE

6.1 Introduction

Le présent chapitre présente les résultats obtenus par la méthode de simulation des grandes échelles appliquée à un écoulement turbulent typique de nature industrielle: il s'agit de l'écoulement se développant derrière une marche descendante. Bien que fort simple, cette géométrie donne lieu à l'apparition de structures tourbillonnaires complexes. Cet écoulement est notamment caractérisé par une zone de recirculation délimitée par la longueur de rattachement qui correspond à l'endroit où la couche de cisaillement rejoint la paroi solide inférieure de la marche. Contrairement au cas laminaire, l'écoulement est instationnaire, ce qui se reflète notamment par le fait que le point de rattachement oscille continuellement dans le temps donnant ainsi lieu à l'existence d'une zone de rattachement. Selon Eaton, 1980, il existe dans cette zone de forts gradients de pression adverses et une interaction importante des différentes structures turbulentes avec la paroi solide. La figure 6.1 illustre les différents paramètres de cet écoulement. Ceux-ci sont caractéristiques de nombreuses configurations industrielles comme les diffuseurs, les combusteurs ainsi que les profils d'ailes d'avion expérimentant le phénomène de séparation. La résolution adéquate de ce type d'écoulement comporte des enjeux importants pour l'industrie et constitue un défi de taille pour l'ingénierie.

Nous présenterons donc dans ce chapitre les résultats numériques obtenus par la méthode de simulation des grandes échelles pour l'écoulement de la marche d'Eaton.

1980. Ce dernier a étudié expérimentalement trois différents écoulements turbulents dont les nombres de Reynolds, basés sur la hauteur de la marche H et la vitesse d'entrée U_o , sont: 11000, 23000 et 39000¹. Nous avons choisi de simuler les cas correspondant au plus faible et au plus élevé des nombres de Reynolds. Dans chacun des cas, le rapport d'expansion² de la marche est de 1.67. Les différents paramètres de comparaison des simulations avec les résultats des expériences d'Eaton, 1980 sont la longueur de rattachement, les profils moyens de vitesse et ceux de l'intensité de turbulence. Une comparaison des résultats obtenus avec les modèles de sous-maille de Smagorinsky, de fonction de structure, de l'approche dynamique classique et de l'approche dynamique mixte est également effectuée. Finalement, on comparera les meilleurs résultats numériques obtenus par l'approche de simulation des grandes échelles (LES) avec les résultats obtenus par la méthode statistique (RANS) basée sur le modèle $k - \epsilon$.

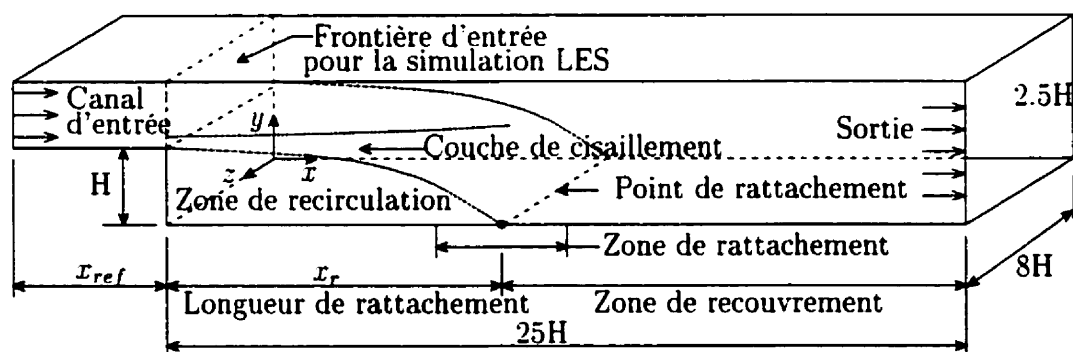


Figure 6.1 Configuration de la marche d'Eaton, 1980 montrant les différents paramètres de l'écoulement.

¹La hauteur de la marche utilisée dans l'expérience d'Eaton H , est de 5.08 cm alors que les valeurs de la vitesse d'entrée (U_o) sont respectivement 3.26 m/s, 6.7 m/s et 11.65 m/s pour $Re_H = 11000, 23000$ et 39000.

²Le rapport d'expansion est défini comme étant le ratio de la hauteur de la sortie du canal sur celle de son entrée.

6.2 Simulation de la marche avec $Re_H = 11000$

6.2.1 Conditions initiales et frontières

Pour toutes les simulations effectuées, nous avons imposé un champ de vitesse initial uniforme dans tout le domaine de calcul. Afin que ce champ respecte l'équation de continuité, nous avons débuté la simulation numérique en considérant l'écoulement comme étant laminaire pour quelques centaines de pas de temps et nous avons subséquemment imposé le champ de vitesse résultant comme étant le champ initial pour le premier pas de temps de la simulation LES.

Le profil moyen de vitesse de l'expérience d'Eaton, 1980 est imposé à la frontière d'entrée de la marche. En principe, on devrait également spécifier à l'entrée les fluctuations temporelles de vitesse puisque l'on résout explicitement les grandes échelles instationnaires avec l'approche LES. La présence de ces fluctuations n'est pas nécessaire puisque la couche limite à l'entrée de la marche est laminaire dans l'expérience d'Eaton, 1980. Mentionnons également que, dans le but de réduire le nombre de points de discrétisation, nous n'avons simulé l'écoulement que dans le canal d'expansion de la marche et que nous avons donc imposé le profil de vitesse d'entrée de l'expérience au niveau de la frontière où débute l'expansion du canal d'entrée. Ceci est justifié par le fait que le profil de vitesse du canal d'entrée spécifié par Eaton, 1980 se trouve à proximité du canal d'expansion, à une distance de $x_{ref}/H = 0.75$ en amont.

À la sortie du canal d'expansion, la condition frontière appropriée pour des écoulements instationnaires est celle dite convective:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + U_c \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x} = 0 \quad (6.1)$$

où U_c correspond à la vitesse moyenne à la sortie du canal. Cette condition convective est également utilisée dans les simulations numériques de Akselvoll et Moin, 1996 et de Le *et al.*, 1997. Elle permet de faciliter l'évacuation des structures tourbillonnaires à l'extérieur du domaine de calcul. Cette frontière de sortie est positionnée à une distance de $X_{sortie}/H = 25$, ce qui constitue une distance suffisamment grande pour permettre aux différentes caractéristiques de l'écoulement de se développer.

Dans la direction de l'envergure³, nous avons choisi d'utiliser les conditions libres ($\partial \bar{u}/\partial z = 0$ et $\partial \bar{v}/\partial z = 0$) et la condition d'imperméabilité ($\bar{w} = 0$). Ces dernières conditions sur les frontières latérales simulent une très grande dimension de la marche dans la direction de l'envergure. Dans le code de calcul, il faut cependant utiliser une dimension de l'envergure assurant que ces conditions latérales n'influencent pas l'écoulement au niveau du plan longitudinal central⁴. À cette fin, plusieurs simulations ont été entreprises en augmentant progressivement la dimension de l'envergure de la marche. Il a été déterminé qu'une envergure correspondant à 65% de celle utilisée dans l'expérience d'Eaton, 1980 est adéquate, ce qui fixe le rapport z/H à 8 environ.

Aux deux parois solides inférieure et supérieure, nous avons opté pour la condition naturelle de non-glissement ($\bar{u}_i = 0$). Nous considérons en effet que la modélisation de la zone de l'écoulement se trouvant près d'une paroi par une loi logarithmique comme le font Neto *et al.*, 1993 est en contradiction avec la philosophie de la simulation des grandes échelles où l'on doit capter le phénomène de production d'énergie turbulente (voir la figure 1.6). Étant donné que l'utilisation d'une loi logarithmique n'est valide que pour le champ moyen de vitesse, elle n'est donc pas

³La direction de l'envergure correspond à la direction z sur la figure 6.1.

⁴Pour être comparables avec l'expérience d'Eaton, 1980, les résultats sont en effet consignés à $z/H = 4$ i.e sur le plan longitudinal central.

utilisable pour le calcul du champ instantané des grandes échelles que l'on résout avec la méthode LES.

6.2.2 Discrétisation spatiale et temporelle

Le tableau 6.1 montre la discrétisation spatiale employée dans les directions axiale, verticale et de l'envergure pour chacun des 4 maillages utilisés, de même que la discrétisation temporelle (pas de temps) correspondante. En tout point du maillage, il a été vérifié, après chacune des simulations, que le nombre de Courant est inférieur à 0.5, ce qui satisfait le critère de stabilité du schéma numérique. Le premier maillage du tableau 6.1 (Maillage 1) a été déterminé comme maillage initial puisqu'il satisfait le critère de tolérance que nous nous sommes fixés sur la longueur de rattachement, c'est-à-dire qu'il permet de prédire cette longueur avec une erreur relative de 20% par rapport à la valeur expérimentale lorsque nous employons l'approche dynamique classique comme modèle de sous-maille⁵. À partir de ce maillage initial, nous avons ensuite progressivement raffiné ce dernier jusqu'à ce que la valeur de la longueur de rattachement ne diffère pas de plus de 2% de celle qui a été obtenue par Eaton, 1980.

Pour tous les maillages présentés au tableau 6.1, les modèles de sous-maille de Smagorinsky, de fonction de structure, de l'approche dynamique classique et de l'approche dynamique mixte ont été testés. Une discrétisation uniforme a été choisie pour la direction longitudinale et celle de l'envergure alors qu'une discrétisation concentrée a été adoptée pour la direction verticale. Nous avons en effet densifié le maillage près des parois solides (parois inférieure et supérieure) ainsi que dans la couche de cisaillement de l'écoulement puisque ces zones comportent

⁵ L'approche dynamique classique a été choisie car elle fait théoriquement partie des techniques les plus adéquates pour modéliser les échelles de sous-maille.

Tableau 6.1 Discrétisation spatiale et temporelle employée lors de la simulation de la marche d'Eaton, 1980. Cas où $Re_H = 11000$.

Maillage	Discrétisation spatiale	$\Delta x/H$	$\Delta y_{\min,\inf}/H$ $\Delta y_{\min,\sup}/H$	$\Delta z/H$	Discrétisation temporelle
Maillage 1	$120 \times 32 \times 48$: 184320 cellules	0.208	1.26×10^{-2} 1.89×10^{-2}	0.164	$1.28 \times 10^{-2} \frac{H}{U_o}$
Maillage 2	$160 \times 40 \times 52$: 332800 cellules	0.156	9.62×10^{-3} 1.44×10^{-2}	0.151	$9.63 \times 10^{-3} \frac{H}{U_o}$
Maillage 3	$180 \times 48 \times 64$: 552960 cellules	0.139	7.76×10^{-3} 1.16×10^{-2}	0.123	$9.63 \times 10^{-3} \frac{H}{U_o}$
Maillage 4	$230 \times 56 \times 72$: 927360 cellules	0.109	6.50×10^{-3} 9.70×10^{-3}	0.109	$6.42 \times 10^{-3} \frac{H}{U_o}$

des gradients élevés de vitesse. Le raffinement de ces zones est calculé mathématiquement par une loi de concentration hyperbolique du même type que celle utilisée par Moin et Kim, 1982 et s'exprime de la façon suivante:

$$y = \tanh[\operatorname{arctanh}(a) \xi] \quad (6.2)$$

où ξ et a sont des paramètres variant entre 0 et 1. Le paramètre ξ est la variable de localisation dans le domaine de référence équidistant alors que le paramètre a permet d'imposer la densité de points: plus a est grand et plus les points de discrétisation sont concentrés près des parois solides. Pour les maillages du tableau 6.1, nous avons utilisé une valeur de a de 0.96 pour déterminer la concentration verticale du maillage près des parois inférieure et supérieure. La taille verticale de la cellule adjacente à la paroi inférieure est désignée par $\Delta y_{\min,\inf}$ et celle de la cellule adjacente à la paroi supérieure par $\Delta y_{\min,\sup}$. La figure 6.2 montre clairement que le maillage est concentré dans les zones se trouvant près des parois solides inférieure et supérieure, de même que dans la zone de la couche de cisaillement.



Figure 6.2 Exemple de maillage employé pour la simulation des grandes échelles au niveau du canal d'expansion de la marche. Maillage 3 du tableau 6.1.

6.2.3 Méthode d'obtention des champs moyens

Avant de présenter les résultats de nos simulations LES, il est impératif d'expliquer la procédure de moyennage employée. La première étape consiste à déterminer le temps à partir duquel nous commençons à accumuler les résultats instantanés pour éventuellement en calculer les valeurs moyennes sur la durée choisie de la simulation. Il est indispensable de permettre à l'état turbulent de l'écoulement de se manifester et d'atteindre un état statistiquement permanent. Ceci requiert généralement plusieurs temps caractéristiques de résidence⁶ dans le domaine de calcul. La figure 6.3 illustre l'évolution temporelle de la composante axiale de la vitesse instantanée, \bar{u} , à $x/H = 20$, $y/H = 1$ et $z/H = 4$. À partir de $tU_o/H = 150$, nous sommes assurés de nous trouver dans un état statistiquement permanent puisque le régime transitoire présent au début de la période d'observation a bel et bien disparu. Ce temps détermine ainsi le moment de la simulation où nous débutons la sommation des différents champs instantanés obtenus pour chaque pas de temps Δt . Il nous faut par la suite déterminer la durée du temps de moyennage. Pour ce faire, nous pouvons par exemple observer l'évolution de la longueur moyenne de rattachement et noter le moment à partir duquel ce paramètre ne varie plus dans le temps. Pour plus de certitude, il est préférable de s'assurer aussi que d'autres caractéristiques de la turbulence, par exemple les différentes composantes de l'intensité de turbulence,

⁶Ce temps caractéristique de résidence représente le temps nécessaire à une particule de fluide pour traverser tout le domaine de calcul de l'entrée du canal jusqu'à la sortie en utilisant la vitesse moyenne de l'écoulement comme vitesse caractéristique de transport de cette particule.

aient elles aussi atteint une convergence statistique. Une simulation LES nécessite ainsi généralement une durée de temps de moyennage 15 à 20 fois plus grande que le temps caractéristique de résidence. Dans le cas présent, nous avons utilisé un facteur de 17 pour toutes les simulations présentées dans la section 6.2.

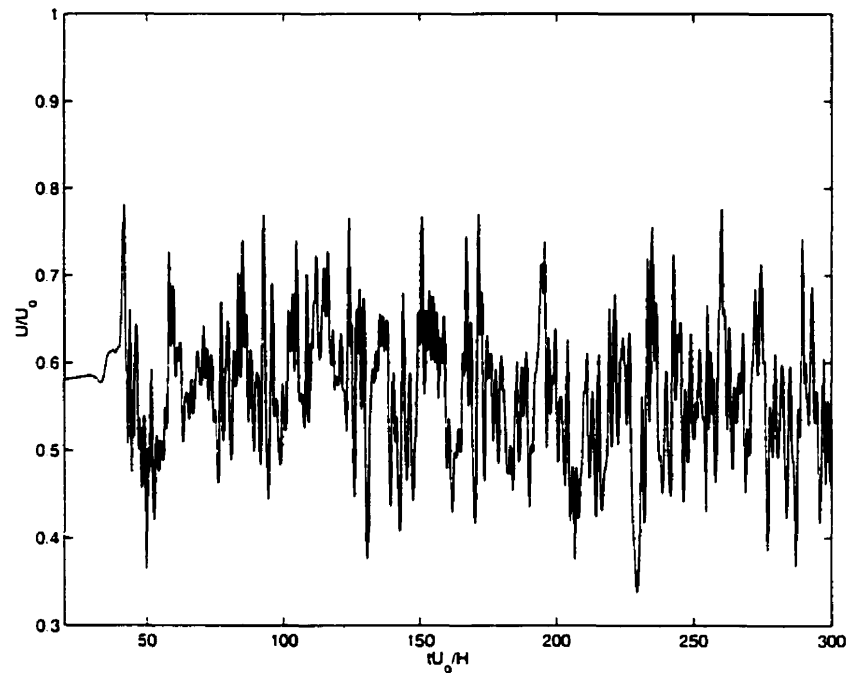


Figure 6.3 Évolution temporelle de la composante de vitesse axiale \bar{u} à $x/H = 20$, $y/H = 1$ et $z/H = 4$ obtenue en utilisant l'approche dynamique mixte avec le Maillage 3.

Précisons que la méthode des trapèzes composés est employée pour le calcul des champs moyens. Supposons par exemple que nous ayons N échantillons de la composante de vitesse instantanée \bar{u} . Il suffit alors, pour déterminer le champ moyen, d'appliquer la relation suivante:

$$\langle \bar{u} \rangle = \frac{1}{\Delta t_{\text{moyennage}}} * \frac{\Delta t_{\text{echanti.}}}{2} [\bar{u}(t_1) + 2 \{ \bar{u}(t_2) + \bar{u}(t_3) + \dots \} + \bar{u}(t_N)] \quad (6.3)$$

où $\Delta t_{\text{moyennage}}$ est la durée de moyennage et $\Delta t_{\text{echanti.}}$ l'intervalle de temps d'échantillonnage. Nous pouvons également déterminer de cette façon les différents produits moyennés de vitesse $\langle \bar{u}_i \bar{u}_j \rangle$. Comme nous le verrons, ces produits moyennés de vitesse font partie des termes constituant le tenseur de Reynolds R_{ij} . Ce tenseur R_{ij} est défini par la relation suivante:

$$R_{ij} = \langle u'_i u'_j \rangle \quad (6.4)$$

où u'_i et u'_j sont les fluctuations de vitesse des champs instantanés u_i et u_j par rapport à leurs moyennes temporelles respectives $\langle u_i \rangle$ et $\langle u_j \rangle$. Ainsi, la fluctuation de vitesse u'_i est définie comme suit:

$$u'_i = u_i - \langle u_i \rangle \quad (6.5)$$

En remplaçant la relation (6.5) dans la définition du tenseur de Reynolds (6.4), on peut facilement réécrire cette dernière expression de la manière suivante:

$$R_{ij} = \langle u_i u_j \rangle - \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle \quad (6.6)$$

Dans le domaine du LES où l'on calcule le champ instantané des grandes échelles, on détermine donc le tenseur de Reynolds associé à celles-ci en utilisant l'équation (6.6) et la définition (2.6) pour établir la relation suivante:

$$\overline{R}_{ij} = \langle \overline{u_i} \overline{u_j} \rangle - \langle \overline{u_i} \rangle \langle \overline{u_j} \rangle \quad (6.7)$$

où \overline{R}_{ij} est le tenseur de Reynolds correspondant aux grandes échelles.

6.2.4 Champs moyens de l'écoulement

6.2.4.1 Longueur moyenne de rattachement: x_r/H

Nous comparerons ici la longueur de rattachement prédite par l'expérience d'Eaton, 1980 avec la valeur obtenue par notre code de calcul DFMAC pour les différents modèles de sous-maille dont nous avons présenté les détails au chapitre 3. Il est bien connu que la longueur de rattachement est une quantité fluctuante pour un écoulement instationnaire comme celui se développant derrière une marche descendante. Pour déterminer la valeur moyenne de cette quantité, la méthode dite "p.d.f"⁷ a été utilisée par Eaton, 1980. Elle consiste à mesurer la fraction du temps total pendant lequel l'écoulement près de la paroi inférieure se déplace dans la direction aval ou dans la direction amont. Le point de rattachement moyen se situe à l'endroit où l'écoulement est caractérisé par un p.d.f de 50%. Pour toutes les simulations présentées dans ce chapitre, nous emploierons cette méthode pour déterminer la longueur moyenne de rattachement. Par exemple, la figure 6.4 montre le pourcentage du temps total de moyennage pour lequel le fluide se trouvant

⁷p.d.f signifie en anglais "percent downstream flow".

près de la paroi inférieure s'écoule dans la direction aval en fonction de la position longitudinale pour le cas où on utilise l'ADM avec le Maillage 3. À partir de cette figure, la longueur moyenne de rattachement est déterminée par la méthode "p.d.f" et donne une valeur de $x_r/H = 6.8$.

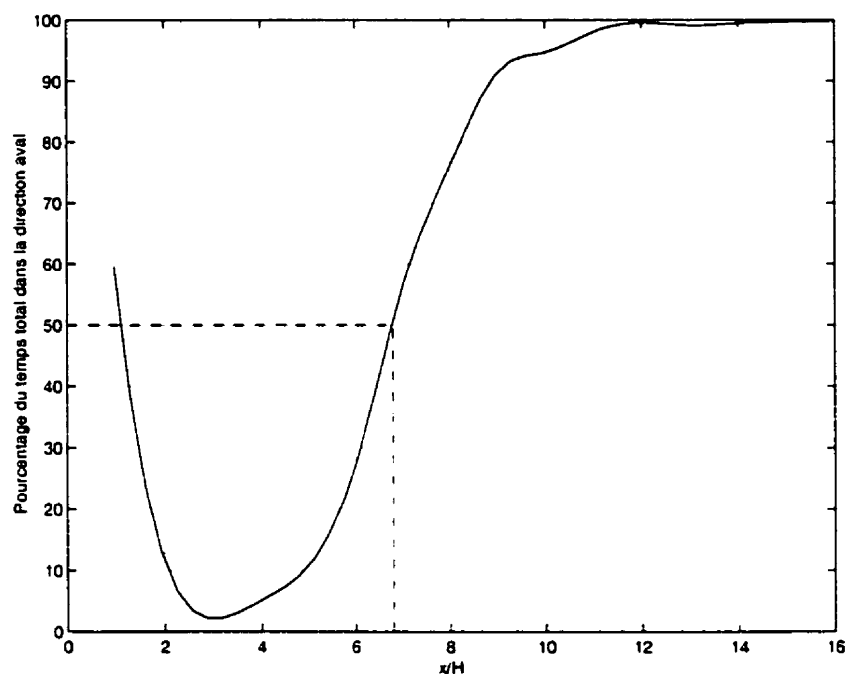


Figure 6.4 Courbe illustrant le pourcentage du temps total pour lequel le fluide se trouvant près de la paroi inférieure se dirige dans la direction aval en fonction de la position longitudinale. Cas où $Re_H = 11000$, utilisation de l'ADM avec le Maillage 3.

Le tableau 6.2 montre les résultats obtenus avec les modèles de sous-maille suivants: modèle de Smagorinsky, modèle de fonction de structure, approche dynamique classique (ADC) et approche dynamique mixte (ADM). Les résultats du modèle de Smagorinsky ont été obtenus en fixant la constante de Smagorinsky à $C_s = 0.2$ et en utilisant une fonction de Van Driest pour l'amortissement de la taille des structures de petites échelles (relation 3.12) se trouvant près des parois solides. On constate que les valeurs de la longueur de rattachement obtenues avec le modèle

de Smagorinsky pour les Maillage 1, Maillage 2 et Maillage 3 sont surestimées par rapport à la longueur de rattachement prévue par l'expérience⁸ i.e $x_r/H = 7.0 \pm 0.1$. Quelques expériences visant à analyser l'impact de la valeur de C_s sur le résultat obtenu ont montré que la longueur de rattachement est fortement dépendante de la valeur de C_s utilisée. Par exemple, cette longueur varie de $10.0H$ à $8.3H$ pour le Maillage 3 en diminuant la constante C_s de 0.2 à 0.16. Nous avons par ailleurs constaté que la détermination de la constante C_s la plus appropriée pour une simulation donnée est fortement tributaire du maillage utilisé et de l'écoulement simulé. Le modèle de Smagorinsky s'avère donc inadéquat puisque les prédictions sont beaucoup trop sensibles à la valeur de C_s et il est de plus incapable de bien représenter le comportement asymptotique de la viscosité de sous-maille près des parois solides. Pour cette raison, nous ne présenterons plus de résultats associés au modèle de Smagorinsky.

Comme l'indique le tableau 6.2, la longueur moyenne de rattachement obtenue avec le modèle de fonction de structure est plus courte que celle de la valeur expérimentale. L'erreur relative par rapport à la valeur expérimentale est d'environ 15% avec le Maillage 3. Ceci est dû au fait que l'amortissement de la viscosité de sous-maille jusqu'aux parois solides déterminé par la relation de Van Driest ne représente pas correctement le comportement asymptotique de ce paramètre dans la zone de recirculation. On remarque aussi une faible sensibilité de la longueur de rattachement en regard des différents maillages utilisés. Il faut cependant noter que, bien que les longueurs de rattachement obtenues avec le Maillage 1 et le Maillage 3 sont presque identiques, les distributions axiales de l'intensité de turbulence ont démontré qu'elles correspondent mieux aux valeurs expérimentales avec le Maillage 3.

⁸Étant donné l'important temps de calcul requis pour l'ADC et l'ADM (environ 350 heures), la simulation concernant le Maillage 4 (maillage le plus fin) n'a été effectuée qu'avec ces deux approches.

Tableau 6.2 Longueurs moyennes de rattachement obtenues avec le code DFMAC selon les différents maillages spécifiés au tableau 6.1 et modèles de sous-maille choisis. Cas où $Re_H = 11000$. Valeur expérimentale obtenue par Eaton, 1980: $x_r/H = 7.0 \pm 0.1$.

Modèle de de sous-maille	Discretisation spatiale			
	Maillage 1	Maillage 2	Maillage 3	Maillage 4
Modèle de Smagorinsky	$x_r/H = 15$	$x_r/H = 11.3$	$x_r/H = 10.0$	-
Fonction de structure	$x_r/H = 5.9$	$x_r/H = 6.2$	$x_r/H = 6.0$	-
Approche dynamique classique (ADC)	$x_r/H = 5.7$	$x_r/H = 6.5$	$x_r/H = 7.1$	$x_r/H = 7.2$
Approche dynamique mixte (ADM)	$x_r/H = 5.4$	$x_r/H = 6.4$	$x_r/H = 6.8$	$x_r/H = 7.1$

Comme pour le modèle de Smagorinsky, nous ne présenterons plus de résultats associés à ce modèle car il est lui aussi inapte à prédire adéquatement l'écoulement près des parois solides.

L'approche dynamique classique (ADC) et l'approche dynamique mixte (ADM) prédisent respectivement une longueur de rattachement de $x_r/H = 7.1$ et de $x_r/H = 6.8$ avec le Maillage 3, valeurs qui concordent bien avec la valeur expérimentale puisqu'elles sont comprises dans la marge d'erreur du résultat d'Eaton, 1980. Un calcul de l'erreur relative résultant de l'utilisation de ces deux approches dynamiques donne respectivement 1.5% et 3% d'écart par rapport à la valeur obtenue par Eaton, 1980. Tel qu'indiqué au tableau 6.2, des longueurs moyennes de rattachement de $x_r/H = 7.2$ et de $x_r/H = 7.1$ sont prédites pour l'ADC et l'ADM avec le Maillage 4, l'erreur relative donne respectivement 3% et 1.5% d'écart comparativement à la valeur expérimentale.

6.2.4.2 Distribution de la vitesse moyenne axiale: $\langle \bar{u} \rangle / U_o$

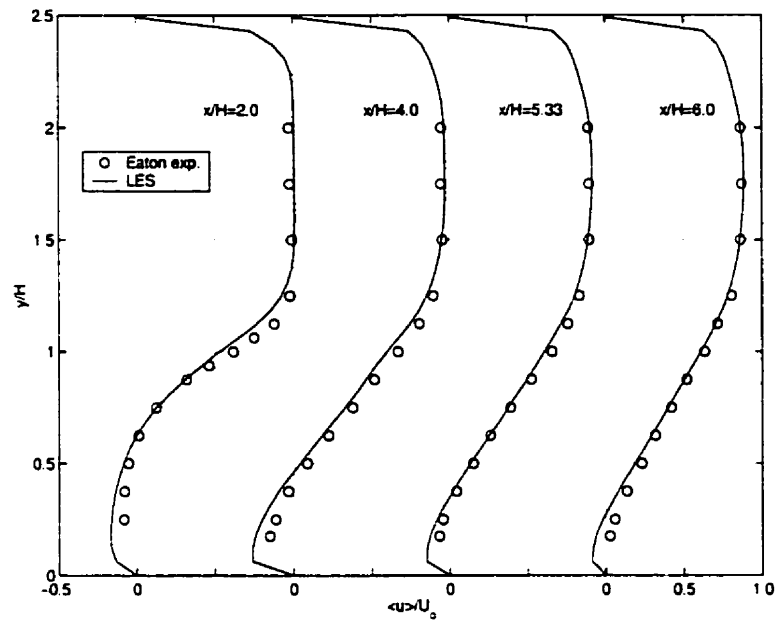
En ce qui concerne la distribution de la vitesse moyenne axiale, l'utilisation de l'ADC comme modèle de sous-maille engendre des résultats presque similaires à ceux obtenus en employant l'ADM. Pour cette raison, nous ne présentons dans cette sous-section que les résultats numériques obtenus avec l'ADM en utilisant le Maillage 4. Précisons également que les distributions de la vitesse moyenne obtenues avec le Maillage 4 ne présentent que de très faibles différences comparativement au Maillage 3. Cependant comme nous le verrons à la sous-section 6.2.4.4, ceci n'est plus le cas lorsque nous examinons une autre caractéristique de l'écoulement comme l'intensité de turbulence axiale.

Les figures 6.5 (a) et 6.5 (b) illustrent la distribution de la vitesse moyenne axiale⁹ $\langle \bar{u} \rangle / U_o$ obtenue à différentes positions longitudinales de la marche et révèlent clairement la capacité de la méthode de simulation des grandes échelles (LES) à prédire adéquatement le comportement de l'écoulement dans les zones de recirculation et de recouvrement. Il est bien connu que la zone de recirculation est très souvent mal représentée lors de l'utilisation d'une modélisation statistique comme celle du modèle $k-\epsilon$ ¹⁰. On en conclut donc que la simulation des grandes échelles offre ainsi une très bonne représentation de la physique de la turbulence pour des écoulements complexes comme celui qui se développe derrière la marche descendante.

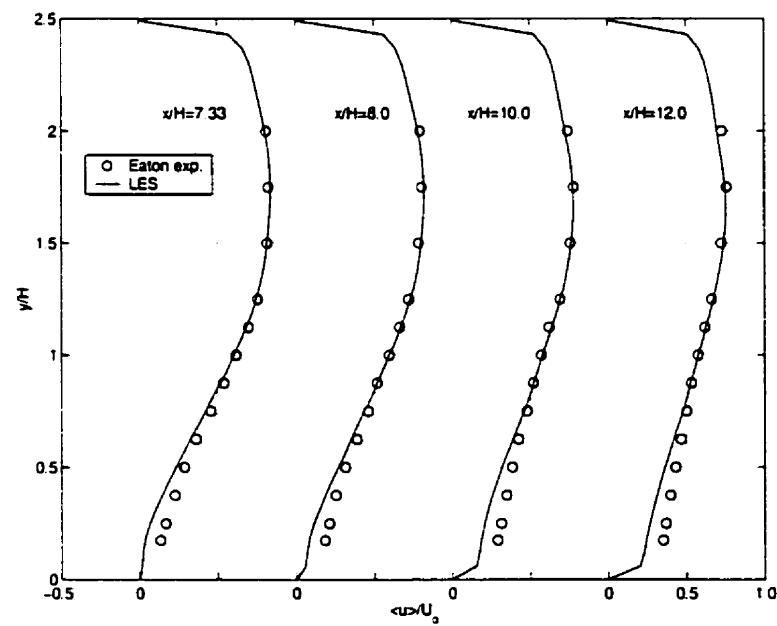
La figure 6.6 illustre le champ des vecteurs de la vitesse moyenne obtenu sur le plan longitudinal central ($z/H = 4$) alors que la figure 6.7 montre les isovaleurs de la composante de vitesse axiale $\langle \bar{u} \rangle$. Un autre aspect intéressant à observer est la distribution de la vitesse moyenne axiale en unité de paroi. La figure 6.8 illus-

⁹Mentionnons que $\langle \bar{u} \rangle$ désigne la moyenne temporelle de la quantité filtrée \bar{u} .

¹⁰À la section 6.2.6, nous présenterons les résultats numériques obtenus avec le modèle $k-\epsilon$.



(a) Zone de recirculation: $x/H = 2.0, 4.0, 5.33$ et 6.0



(b) Zone de recouvrement: $x/H = 7.33, 8.0, 10.0$ et 12.0

Figure 6.5 Comparaison des résultats numériques obtenus avec l'ADM et les mesures expérimentales Eaton, 1980: profil de la vitesse moyenne $\langle \bar{u} \rangle / U_o$ sur le plan longitudinal central ($z/H = 4$). Cas où $Re_H = 11000$ avec le Maillage 4.

tre cette distribution près de la paroi inférieure pour les positions longitudinales $x/H = 8, 12, 16, 20$ et 24 ainsi que le profil de vitesse de la sous-couche visqueuse ($y^+ < 5$) et le profil logarithmique ($30 < y^+ < 200$) caractérisant typiquement un canal plan turbulent¹¹. Cette figure montre que le premier point de grille se situe bien à l'intérieur de la sous-couche visqueuse puisque sa position verticale est de $y^+ < 2$ pour toutes les positions longitudinales. Aussi, le maillage utilisé est suffisamment concentré pour capter la sous-couche visqueuse puisque quatre points de discrétisation se retrouvent dans cette région à la position $x/H = 24$. Comme on pouvait le présager, la figure 6.8 confirme que les distributions de vitesse aux positions longitudinales $x/H = 8$ et 12 sont très différentes du profil logarithmique mais qu'à mesure qu'on s'approche de la frontière de sortie ($x/H = 25$), la distribution de la vitesse moyenne est très proche de celle de la loi logarithmique jusqu'à environ $y^+ \approx 200$. Au-delà de cette position verticale, la figure 6.8 indique que la couche limite turbulente n'est pas encore totalement développée.

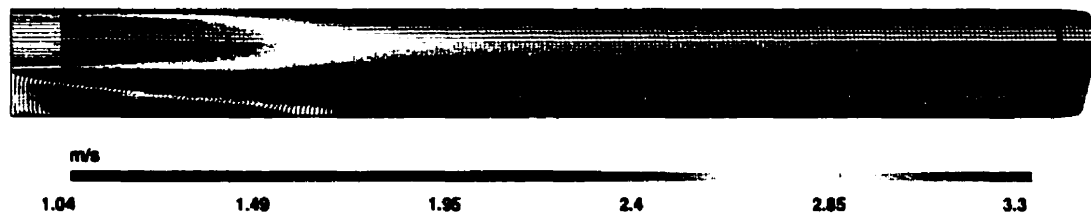


Figure 6.6 Champ des vecteurs de la vitesse moyenne sur le plan central $z/H = 4$.
Cas où $Re_H = 11000$, utilisation de l'ADM avec le Maillage 4.

¹¹Le profil de la sous-couche visqueuse est donné par la relation suivante: $u^+ = y^+$ alors que le profil logarithmique est représenté par la relation suivante: $u^+ = (1/0.41) \ln y^+ + 5.0$.

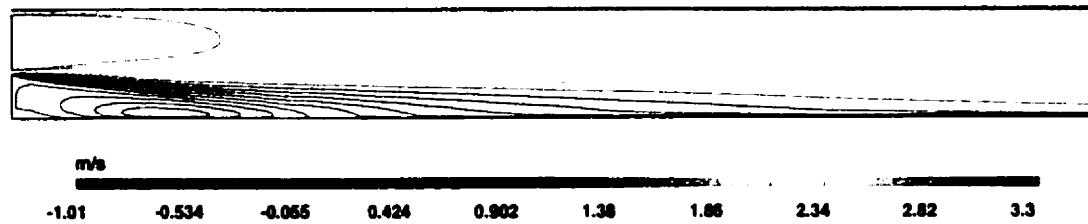


Figure 6.7 Isovaleurs de la composante de vitesse axiale $\langle \bar{u} \rangle$. Cas où $Re_H = 11000$, utilisation de l'ADM avec le Maillage 4.

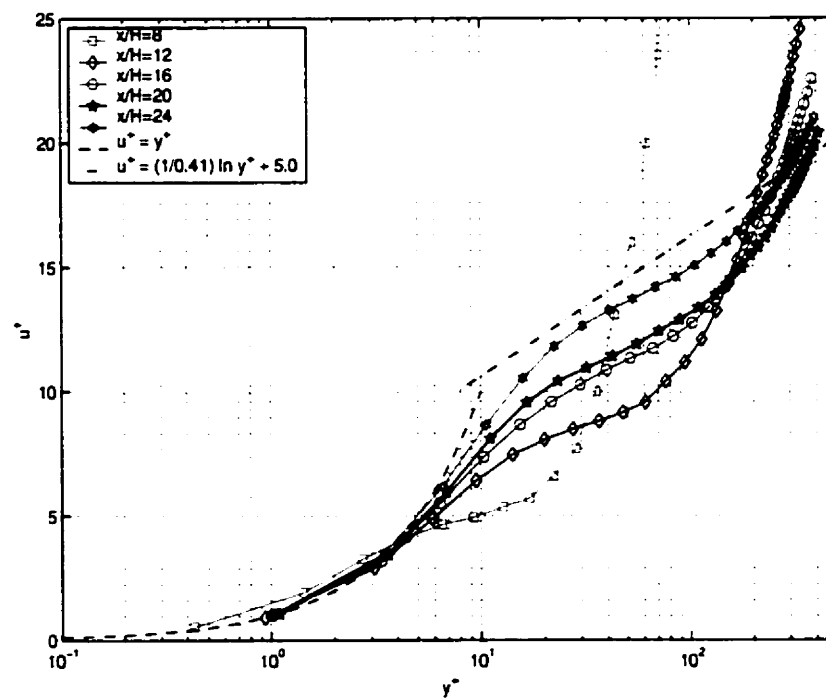


Figure 6.8 Distribution de la composante de vitesse axiale u^+ aux positions longitudinales $x/H = 8, 12, 16, 20$ et 24 en fonction de la distance verticale y^+ au-dessus de la paroi inférieure. Cas où $Re_H = 11000$, utilisation de l'ADM avec le Maillage 4.

6.2.4.3 Intensité de turbulence axiale: $\langle u'^2 \rangle / U_o^2$

Les figures 6.9 (a) et 6.9 (b) montrent les distributions de l'intensité de turbulence axiale $\langle u'^2 \rangle / U_o^2$ obtenues avec l'utilisation de l'ADM et l'ADC à différentes positions longitudinales avec le Maillage 3. Pour ces deux approches dynamiques, les figures indiquent une bonne concordance des résultats numériques comparativement aux valeurs expérimentales d'Eaton, 1980. On constate que l'intensité de turbulence axiale est plus intense près de la marche qu'aux positions longitudinales plus éloignées: il existe donc une décroissance de l'intensité de turbulence dans la direction longitudinale de l'écoulement. Ceci s'explique par le fait qu'à proximité de la marche, les structures tourbillonnaires sont très fluctuantes à cause de la forte interaction entre la zone de recirculation et la couche de cisaillement.

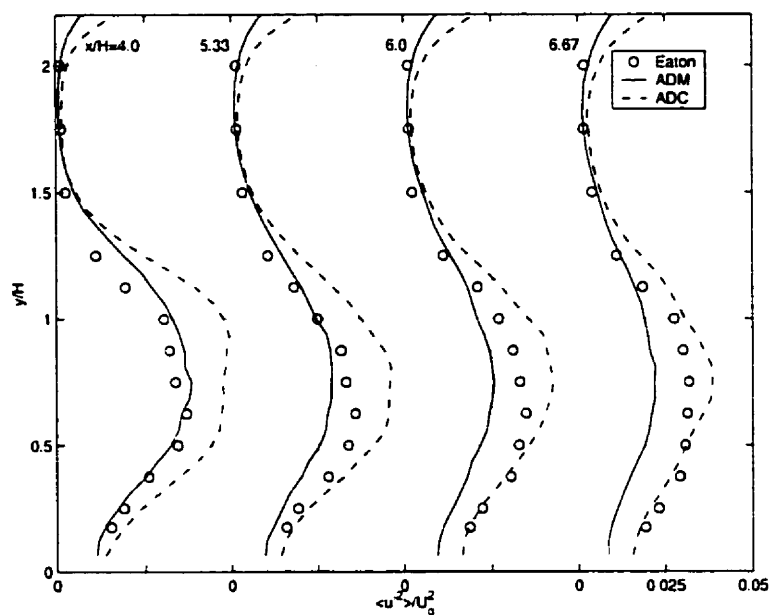
L'observation des figures 6.9 (a) et 6.9 (b) semble à première vue indiquer que l'ADC donne de meilleurs résultats pour $\langle u'^2 \rangle / U_o^2$ pour les positions longitudinales se situant dans la zone de recouvrement. Or, une analyse plus approfondie montre que l'ADC surestime le taux de décroissance de $\langle u'^2 \rangle / U_o^2$ pour les positions $x/H \geq 7$ comme l'illustre la figure 6.10 alors que cette même approche prédit mieux ce taux pour les positions plus près de la marche soit entre $x/H = 4$ et $x/H = 6$ ¹². Le taux de décroissance de $\langle u'^2 \rangle / U_o^2$ est mieux représenté avec l'ADM dans la zone de recouvrement bien que cette approche sous-estime l'intensité de turbulence axiale par rapport aux données expérimentales. Mentionnons également qu'étant donné que l'intensité de turbulence axiale est bien supérieure aux valeurs expérimentales près de la marche avec l'ADC, il est normal qu'à un certain moment en s'éloignant de cette dernière, les résultats de la figure 6.9 (b) coïncident avec les valeurs expérimentales. La sous-estimation de l'intensité de turbulence de

¹²On évalue le taux de décroissance de l'intensité de turbulence axiale en déterminant la pente des courbes montrées sur la figure 6.10.

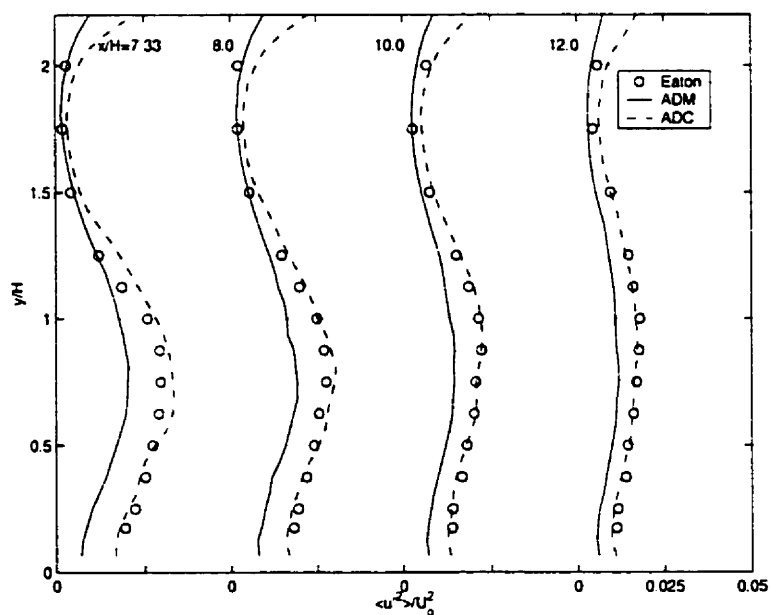
l'ADM comparativement à l'ADC a également été observée par Zang *et al.*, 1993 suite à la simulation de la turbulence à l'intérieur d'une cavité carrée.

Les figures 6.11 (a), 6.11 (b), 6.12 (a) et 6.12 (b) montrent quant à elles les distributions de l'intensité de turbulence verticale $\langle v'^2 \rangle / U_o^2$ et de l'envergure $\langle w'^2 \rangle / U_o^2$ obtenues avec l'ADM et l'ADC aux mêmes positions longitudinales que celles présentées précédemment. Étant donné que nous n'avons pas de données expérimentales pour $\langle v'^2 \rangle / U_o^2$ et $\langle w'^2 \rangle / U_o^2$, nous ne pouvons que comparer les deux approches dynamiques entre elles. Or, cette comparaison révèle encore une fois que les composantes de l'intensité de turbulence $\langle v'^2 \rangle / U_o^2$ et $\langle w'^2 \rangle / U_o^2$ obtenues avec l'ADM sont légèrement sous évaluées par rapport aux valeurs obtenues avec l'ADC. En observant les figures 6.9, 6.11 et 6.12, on constate que pour toutes les positions longitudinales: $\langle u'^2 \rangle / U_o^2 > \langle w'^2 \rangle / U_o^2 > \langle v'^2 \rangle / U_o^2$. Cette inégalité entre les différentes composantes de l'intensité de turbulence est bien connue: elle est en effet mentionnée dans les simulations LES d'un canal plan turbulent effectuée par Moin et Kim, 1982 et d'une marche descendante réalisée par Avancha et Fletcher, 2000.

La figure 6.13 montre la répartition du champ de l'énergie cinétique de turbulence k . Cette énergie est directement liée aux variations temporelles des échelles résolues et est définie par l'expression $k = 1/2(\langle u'^2 \rangle + \langle v'^2 \rangle + \langle w'^2 \rangle)$. Il est clairement illustré que l'instationnarité de l'écoulement se trouve dans la couche de cisaillement près de la marche et dans la zone de recirculation de l'écoulement. Ceci est également visible à la figure 6.9 (a) où l'on constate la présence de grandes intensités de turbulence $\langle u'^2 \rangle / U_o^2$ aux positions verticales $0.5 \leq y/H \leq 1.0$.



(a) Zone de recirculation: $x/H = 4.0, 5.33, 6.0$ et 6.67



(b) Zone de recouvrement: $x/H = 7.33, 8.0, 10.0$ et 12.0

Figure 6.9 Distribution de l'intensité de turbulence axiale $\langle u'^2 \rangle / U_o^2$ sur le plan longitudinal central ($z/H = 4$). Cas où $Re_H = 11000$, utilisation de l'ADM et de l'ADC avec le Maillage 3.

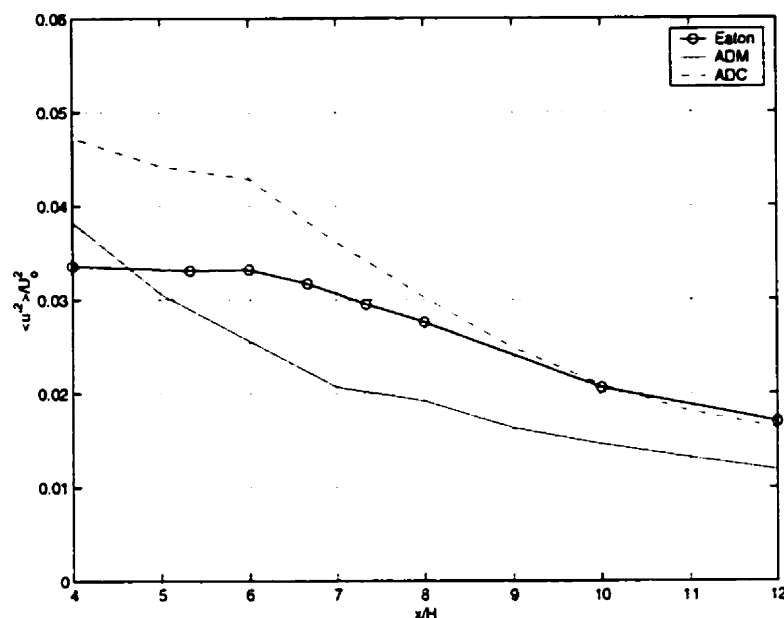


Figure 6.10 Évolution de l'intensité de turbulence axiale $\langle u'^2 \rangle / U_o^2$ selon la direction longitudinale. Cas où $Re_H = 11000$, utilisation de l'ADM et de l'ADC avec le Maillage 3 sur le plan longitudinal central à $y/H = 0.75$.

6.2.4.4 Effet du raffinement du maillage

Comme nous l'avons auparavant mentionné, l'utilisation du Maillage 4 (maillage le plus fin) plutôt que le Maillage 3 ne modifie que très légèrement la longueur moyenne de rattachement et le champ moyen de vitesse alors que ceci n'est plus le cas en ce qui concerne l'intensité de turbulence axiale $\langle u'^2 \rangle / U_o^2$. Cette sous-section expose donc tout d'abord l'effet du raffinement du maillage sur l'intensité de turbulence axiale $\langle u'^2 \rangle / U_o^2$ en utilisant l'ADM. Les figures 6.14 (a) et 6.14 (b) montrent les résultats obtenus avec le Maillage 3 et le Maillage 4. Elles indiquent une meilleure représentation de l'intensité de turbulence axiale lorsque le Maillage 4 est utilisé. En effet, plus le maillage est fin, plus on est en mesure de représenter une grande gamme d'échelles tourbillonnaires de plus en plus petites qui conséquemment contribuent à enrichir le contenu de fluctuations de vitesse et donc à engendrer une

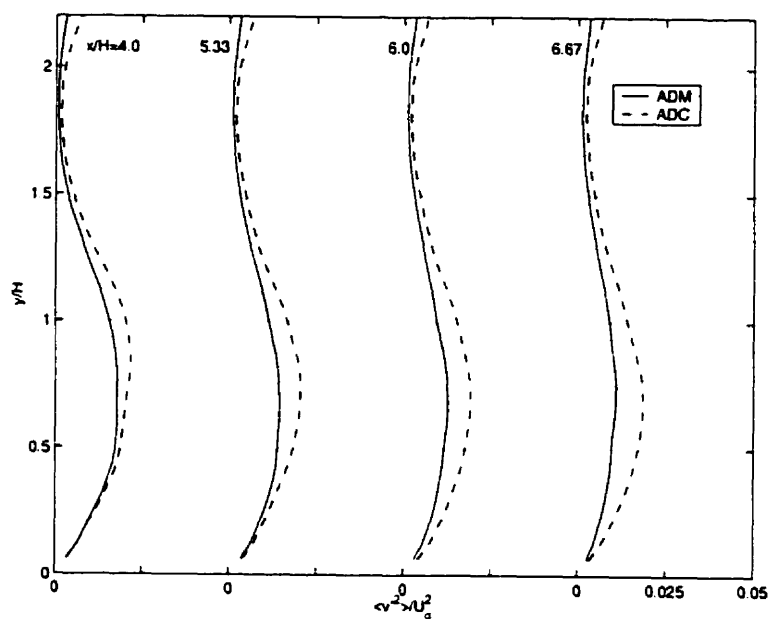
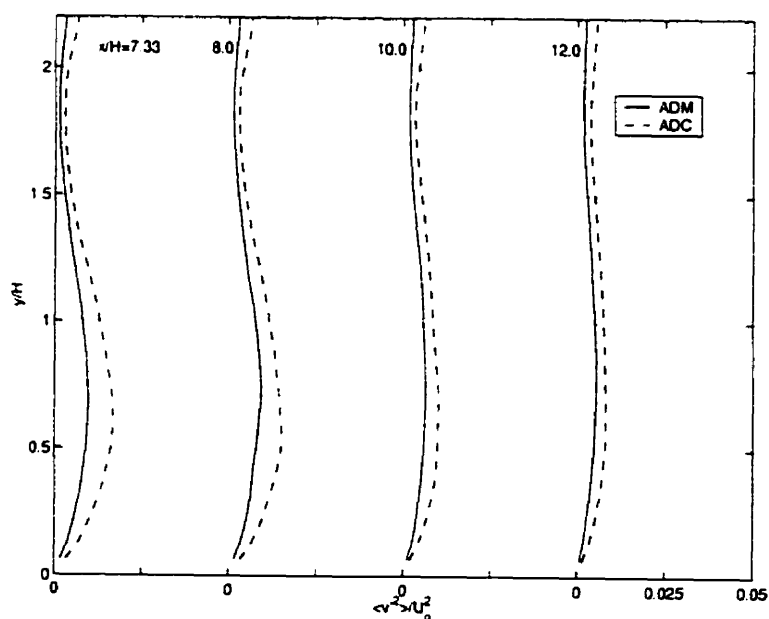
(a) $x/H = 4.0, 5.33, 6.0$ et 6.67 (b) $x/H = 7.33, 8.0, 10.0$ et 12.0

Figure 6.11 Distribution de l'intensité de turbulence verticale $\langle v'^2 \rangle / U_o^2$ sur le plan longitudinal central ($z/H = 4$). Cas où $Re_H = 11000$, utilisation de l'ADM et de l'ADC avec le Maillage 3.

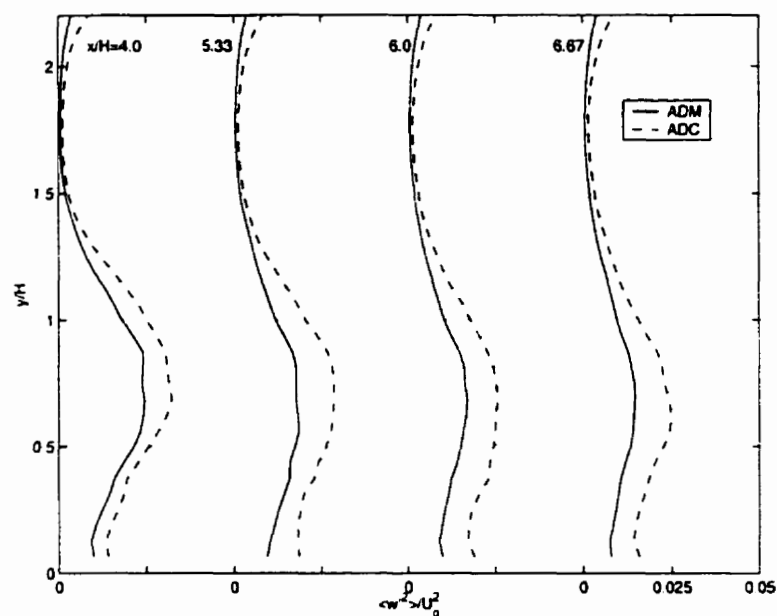
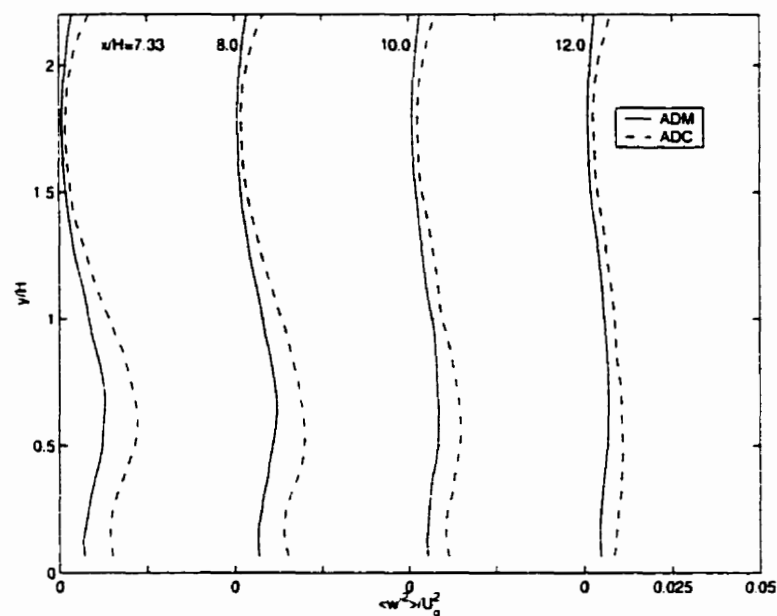
(a) $x/H = 4.0, 5.33, 6.0$ et 6.67 (b) $x/H = 7.33, 8.0, 10.0$ et 12.0

Figure 6.12 Distribution de l'intensité de turbulence selon l'envergure $\langle w'^2 \rangle / U_o^2$ sur le plan longitudinal central ($z/H = 4$). Cas où $Re_H = 11000$, utilisation de l'ADM et de l'ADC avec le Maillage 3.

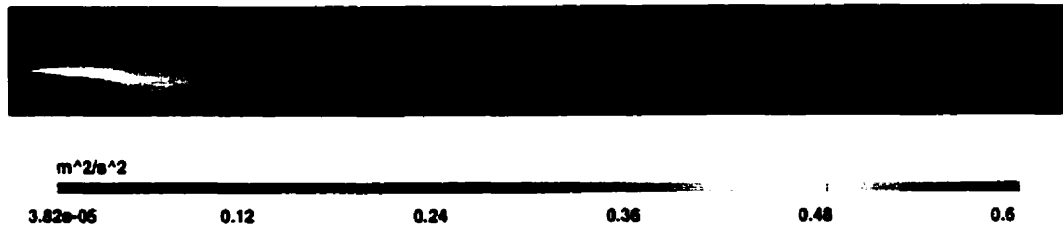
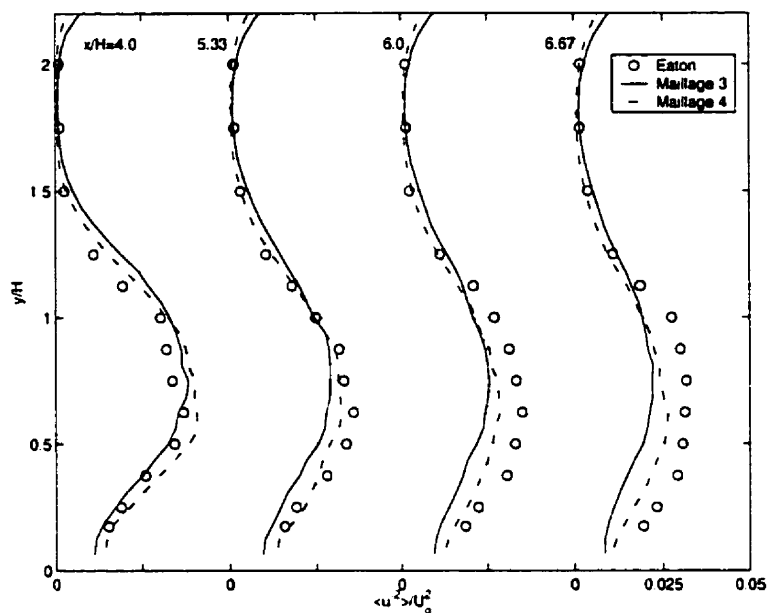


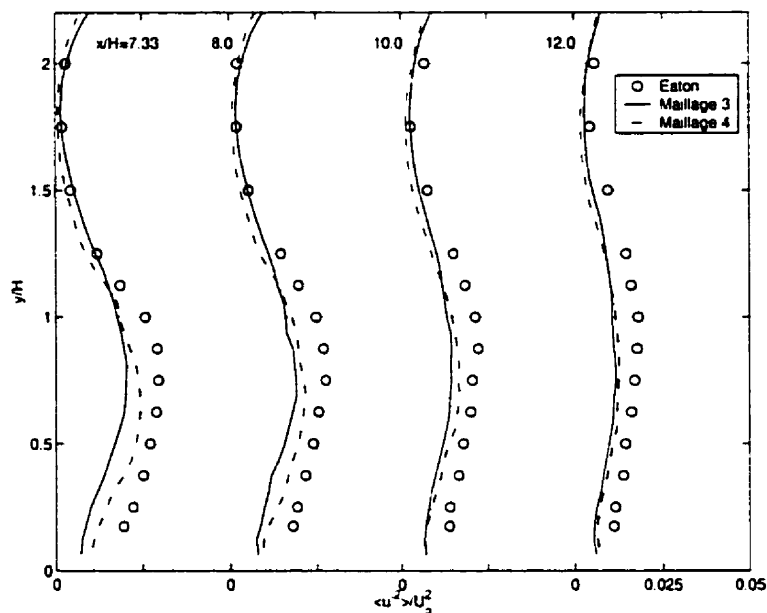
Figure 6.13 Champ de l'énergie cinétique de turbulence k associée aux grandes échelles. Cas où $Re_H = 11000$, utilisation de l'ADM avec le Maillage 4.

plus grande énergie de turbulence.

Les figures 6.15 (a) et 6.15 (b) illustrent l'intensité de turbulence axiale $\langle u'^2 \rangle / U_o^2$ dans la zone de recirculation et dans la zone de recouvrement obtenue avec l'ADM et l'ADC en utilisant le Maillage 4. Ces figures montrent que les calculs de $\langle u'^2 \rangle / U_o^2$ effectués avec les deux approches dynamiques représentent convenablement l'intensité de turbulence axiale. Cependant, comme précédemment, une analyse plus détaillée de l'évolution de l'intensité de turbulence axiale selon la direction longitudinale s'impose afin de bien mettre en évidence le comportement des deux approches dynamiques lorsque nous raffinons le maillage (passage du Maillage 3 au Maillage 4). La figure 6.16 montre l'évolution de $\langle u'^2 \rangle / U_o^2$ obtenue avec l'ADM et l'ADC dans la direction longitudinale aux positions $y/H = 0.75$ et $z/H = 4.0$. Pour l'ADC, cette figure révèle premièrement une plus faible surestimation de $\langle u'^2 \rangle / U_o^2$ et une meilleure prédiction du taux de décroissance de l'intensité dans l'intervalle $4 \leq x/H \leq 6$ avec le Maillage 4 qu'avec le Maillage 3. Par contre, au-delà de la position $x/H > 6$, l'utilisation du Maillage 4 montre que l'intensité de turbulence axiale est supérieure à celle prévue par le Maillage 3 et s'éloigne donc encore plus des valeurs expérimentales. On constate de plus que le taux de décroissance de $\langle u'^2 \rangle / U_o^2$ pour les positions longitudinales $x/H \geq 7$ est sensiblement identique à celui du Maillage 3 mais est toujours surévalué. Quant aux simulations utilisant l'ADM, la figure 6.16 indique que le taux de décroissance de l'intensité de turbu-

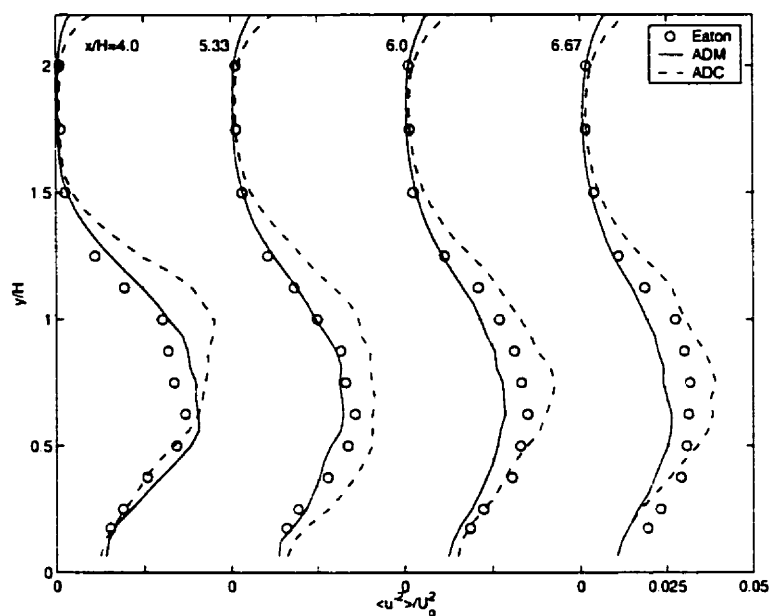


(a) Zone de recirculation: $x/H = 4.0, 5.33, 6.0$ et 6.67

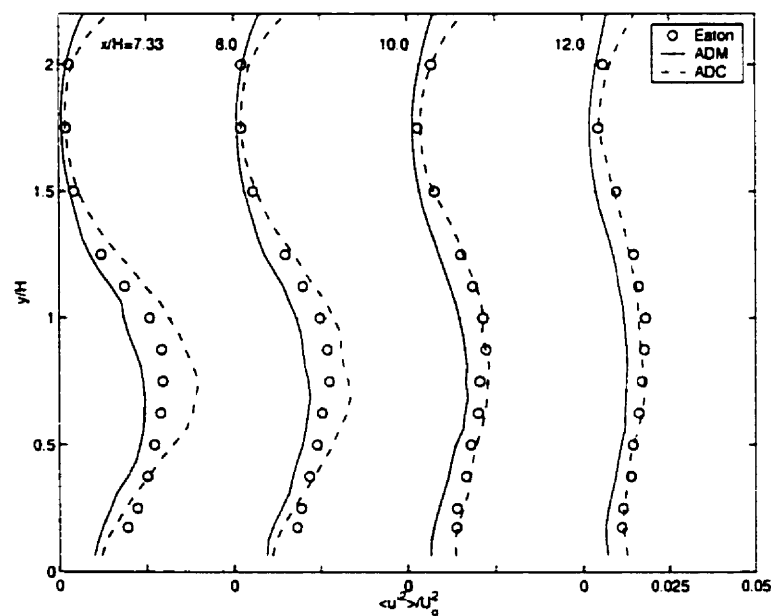


(b) Zone de recouvrement: $x/H = 7.33, 8.0, 10.0$ et 12.0

Figure 6.14 Analyse de l'effet du maillage: distribution de l'intensité de turbulence axiale $\langle u'^2 \rangle / U_o^2$ avec le Maillage 3 et le Maillage 4. Cas où $Re_H = 11000$, utilisation de l'ADM.



(a) Zone de recirculation: $x/H = 4.0, 5.33, 6.0$ et 6.67



(b) Zone de recouvrement: $x/H = 7.33, 8.0, 10.0$ et 12.0

Figure 6.15 Analyse de l'effet de l'approche utilisée: distribution de l'intensité de turbulence axiale $\langle u'^2 \rangle / U_o^2$. Cas où $Re_H = 11000$, utilisation de l'ADM et de l'ADC avec le Maillage 4.

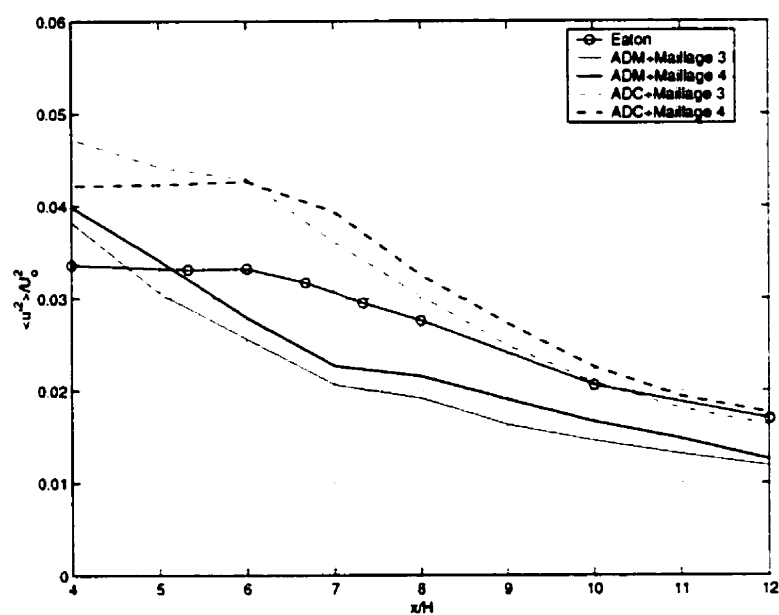


Figure 6.16 Évolution de l'intensité de turbulence axiale $\langle u'^2 \rangle / U_o^2$ selon la direction longitudinale avec le Maillage 3 et le Maillage 4 sur le plan longitudinal central à $y/H = 0.75$. Cas où $Re_H = 11000$, utilisation l'ADM et l'ADC.

lence axiale est toujours mal représenté au niveau de l'intervalle $4 \leq x/H \leq 6$ avec le Maillage 4 et qu'il est pratiquement identique à celui du Maillage 3 pour les positions correspondant à la zone de recouvrement ($x/H \geq 7$). Dans cette zone, le taux de décroissance est mieux prédit avec l'ADM que lors de l'utilisation de l'ADC. Contrairement aux résultats obtenus avec l'ADC, les valeurs de $\langle u'^2 \rangle / U_o^2$ obtenues avec l'ADM se rapprochent des valeurs expérimentales d'Eaton, 1980 avec le Maillage 4.

En résumé, l'effet du raffinement du maillage a révélé que les taux de décroissance de l'intensité de turbulence axiale obtenues avec le Maillage 4 pour l'ADM et l'ADC sont pratiquement identiques à ceux qui ont été obtenus avec le Maillage 3. Cependant, l'observation des valeurs de $\langle u'^2 \rangle / U_o^2$ calculées avec l'ADM au-delà de la position $x/H > 6$ indique qu'elles se rapprochent des mesures expérimentales en raffinant le maillage alors que la tendance inverse se produit avec l'ADC. Cette situation s'expliquerait par le fait que l'ADC modélise une quantité trop importante de réinjection d'énergie ("backscattering") vers les grandes échelles, ce qui entraîne une énergie de turbulence plus élevée. Par conséquent, il faut analyser avec une certaine précaution les résultats de l'intensité de turbulence axiale issus de l'ADC. Comme nous le verrons à la prochaine sous-section, l'ADM se montre supérieure à l'ADC puisqu'elle offre une plus grande stabilité numérique lors de la simulation des grandes échelles.

6.2.4.5 Comparaison entre l'ADC et l'ADM

Au chapitre 3, nous avons discuté des principaux avantages de l'utilisation de l'ADM plutôt que l'ADC, entre autres la plus grande stabilité obtenue lors des simulations. Rappelons ici que l'ADM calcule explicitement le terme de Léonard modifié (L_{ij}^m) responsable en grande partie de la réinjection de l'énergie vers les

grandes échelles. Les variations de la constante dynamique C sont alors faibles et la stabilité des simulations numériques s'en trouve améliorée. Quant à l'ADC, étant donné que la physique de sous-maille y est modélisée entièrement par la constante C , celle-ci est assujettie à de grandes variations engendrant un excédent de réinjection de l'énergie vers les grandes échelles, ce qui déstabilise le calcul numérique. À titre d'exemple, nous avons recueilli la distribution de la constante C à un certain temps donné lors de la simulation LES avec le Maillage 3. La figure 6.17 illustre les variations de C obtenues avec l'ADC et l'ADM à différentes positions longitudinales dans la marche. Les faibles amplitudes de la constante C obtenues avec l'ADM minimisent ainsi l'impact de la modélisation de sous-maille.

Toujours pour une raison de stabilité numérique, nous avons annulé la viscosité totale ($\nu + \nu_t$) aux endroits où cette dernière est négative lors des simulations des grandes échelles avec l'ADC et avec l'ADM¹³. Cette procédure d'annulation s'avère plus fréquente lorsque nous employons l'ADC. Par exemple, la simulation des grandes échelles avec le Maillage 4 et l'ADM requiert, sur toute la durée de moyennage, l'annulation de la viscosité totale sur 2% du nombre total de cellules alors que ce nombre est de 9% pour l'ADC. On intervient donc sur 4.5 fois plus de cellules lorsque l'ADC est utilisée. Cette procédure d'annulation de la viscosité totale, artifice pour assurer la stabilité numérique des simulations, fausse en effet quelque peu la réalité du phénomène physique, ce qui est d'autant plus vrai lorsqu'elle est effectuée en plusieurs points du domaine de calcul.

Lorsque nous comparons le temps de calcul requis par ces deux approches dynamiques avec le Maillage 4, nous constatons que l'ADM nécessite environ 15% plus de temps de calcul que l'ADC. Ceci s'explique par le fait que l'ADM doit

¹³Précisons que cette annulation de la viscosité totale n'élimine pas la réinjection de l'énergie des petites échelles vers les grandes mais ne fait que la restreindre.

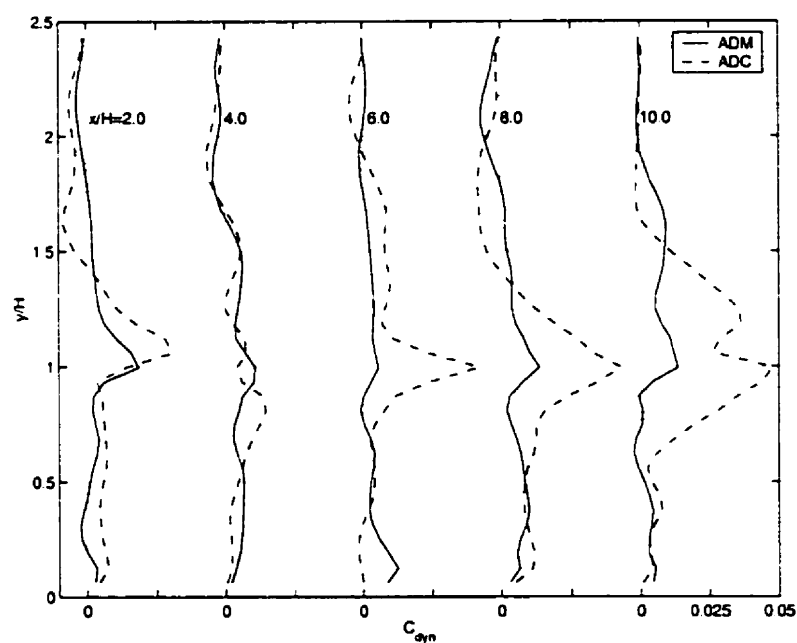


Figure 6.17 Distribution de la constante dynamique C aux positions longitudinales $x/H = 2.0, 4.0, 6.0, 8.0$ et 10.0 . Comparaison entre l'ADM et l'ADC avec le Maillage 3 pour le cas où $Re_H = 11000$ à $t = 962H/U_o$.

calculer un plus grand nombre de quantités filtrées lors de la détermination de la constante dynamique C .

Jusqu'à maintenant, les simulations des grandes échelles réalisées pour l'écoulement turbulent derrière la marche descendante ont montré par divers paramètres tels, la longueur de rattachement, les champs moyens de vitesse et l'intensité de turbulence, que l'ADM et l'ADC représentent convenablement la physique de cet écoulement. L'ADM prédit cependant un meilleur taux de décroissance de l'intensité de turbulence axiale dans la zone de recouvrement de l'écoulement. En raffinant le maillage, les valeurs de l'intensité de turbulence axiale obtenues avec l'ADM se rapprochent des données expérimentales alors que l'utilisation de l'ADC indique l'effet contraire.

6.2.4.6 Analyse spectrale

Lors d'une simulation LES, la meilleure façon de s'assurer que le modèle de sous-maille agit adéquatement sur les grandes échelles consiste à vérifier que l'énergie cinétique de ces dernières est bel et bien transférée vers les plus petites échelles. D'après Ferziger, 1995, l'énergie de turbulence associée aux plus grands nombres d'onde (petites échelles) doit être au moins de deux ordres de grandeur inférieure à l'énergie maximale associée aux petits nombres d'onde (grandes échelles). La vérification de ce critère nous indiquera donc que le modèle de sous-maille représente correctement le phénomène de dissipation de l'énergie. Pour ce faire, il s'agit d'effectuer l'analyse spectrale de l'évolution temporelle des fluctuations de vitesse et de calculer la transformée de Fourier rapide (FFT) de ce signal. La figure 6.18 illustre le spectre fréquentiel de la composante de fluctuation axiale u'^2 à la position $x/H = 20$, $y/H = 1$ et $z/H = 4$ en fonction du nombre de Strouhal qui est défini par $St = fH/U_o$ où f est la fréquence du signal temporel. Cette figure montre bien que la majorité de l'énergie se trouve aux petits nombres de Strouhal et que cette

énergie se transfère vers les plus petites échelles résolues à un taux de décroissance très proche de celui prévu par la théorie de Kolmogorov dans la zone inertielle et qui est proportionnel à $-5/3$. On observe également à la figure 6.18 que l'énergie associée aux grandes fréquences (petites échelles) est inférieure d'au moins deux ordres de grandeur à l'énergie maximale se trouvant aux basses fréquences (grandes échelles), ce qui satisfait le critère émis par Ferziger, 1995 concernant l'aptitude du modèle de sous-maille à bien représenter la dissipation de l'énergie.

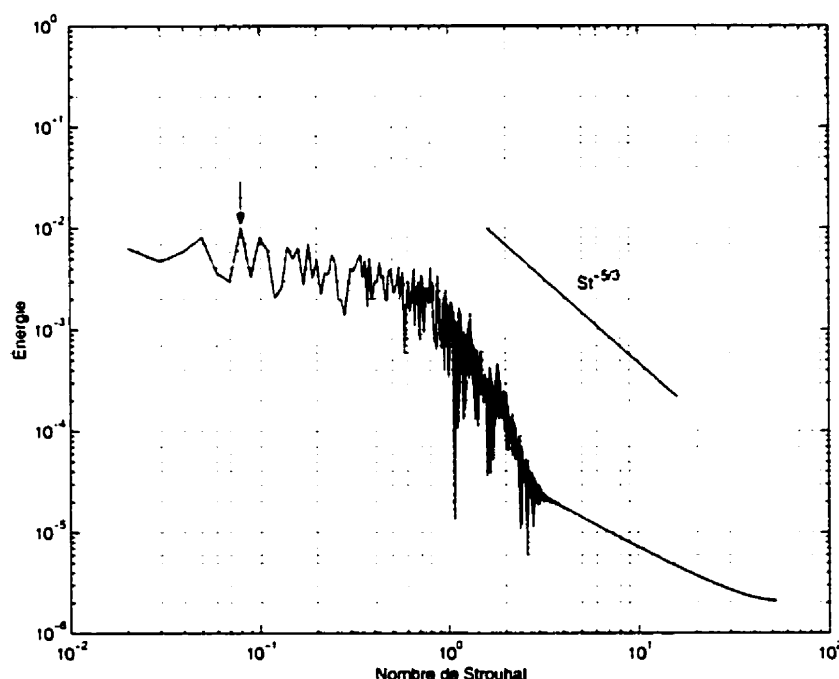


Figure 6.18 Spectre fréquentiel de la composante de fluctuation axiale u'^2 en fonction du nombre de Strouhal St à la position $x/H = 20$, $y/H = 1$ et $z/H = 4$. Période d'observation correspondant à $T_o = 100H/U_o$. Cas où $Re_H = 11000$, utilisation de l'ADM avec Maillage 3.

Il est bien connu que la turbulence se développant derrière une marche descendante est caractérisée par la présence de grands tourbillons cohérents¹⁴ associés à

¹⁴Un tourbillon cohérent est un tourbillon qui possède une durée de vie grand comparativement à son temps de retournement.

une plage bien précise de fréquences. Eaton, 1980 a mesuré le spectre d'énergie des fluctuations axiales à différentes positions et a indiqué que l'énergie maximale associée aux tourbillons cohérents se situait généralement dans l'intervalle $0.066 < St < 0.08$. La figure 6.18 illustre que l'énergie maximale du spectre survient approximativement pour un nombre de Strouhal $St = 0.08$ (voir la flèche sur la figure). Cette valeur est très proche de celle déterminée par Eaton, 1980 pour $Re_H = 11000$ qui est $St = 0.074$. D'autres simulations numériques d'une marche descendante effectuées par Neto *et al.*, 1993 et par Le *et al.*, 1997 ont confirmé la présence d'une fréquence dominante associée à un pic d'énergie de turbulence et qui se situait dans la plage de fréquence déterminée par Eaton, 1980.

6.2.4.7 Champ de pression

La distribution des isovaleurs du coefficient de pression $C_p = (\langle \bar{p} \rangle - p_o) / 0.5\rho U_o^2$ est présentée à la figure 6.19 où p_o est la pression à l'entrée du canal. Quant à la figure 6.20, elle montre l'évolution axiale du coefficient de pression C_p près de la paroi inférieure. On remarque que le gradient de pression est d'abord négatif jusqu'à la position $x/H = 2.5$ où il devient rapidement positif (gradient de pression adverse) jusque dans la zone de recouvrement soit $x/H \approx 10$ où il se stabilise. Les valeurs expérimentales de C_p ne sont malheureusement pas disponibles. Il a cependant été démontré que le comportement de C_p obtenu par une simulation directe réalisée par Le *et al.*, 1997 sur une autre marche descendante est similaire à celui que nous observons à la figure 6.20.

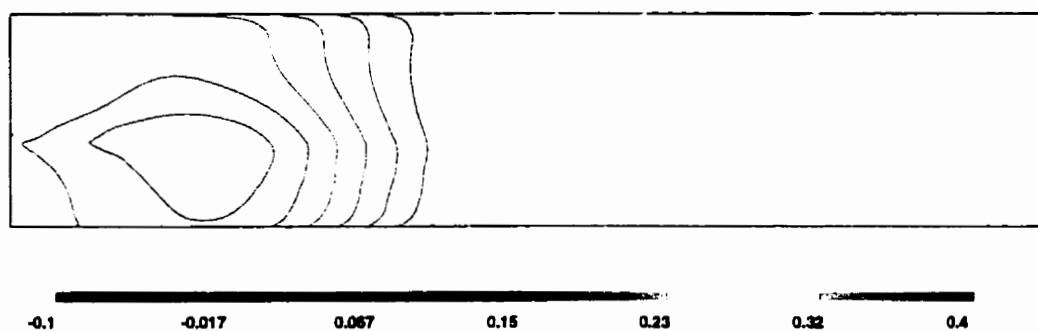


Figure 6.19 Isovaleurs du coefficient de pression $C_p = (\bar{p} - p_o) / 0.5\rho U_o^2$ sur le plan longitudinal central. Cas où $Re_H = 11000$, utilisation de l'ADM avec Maillage 3. Agrandissement au niveau de la zone de recirculation.

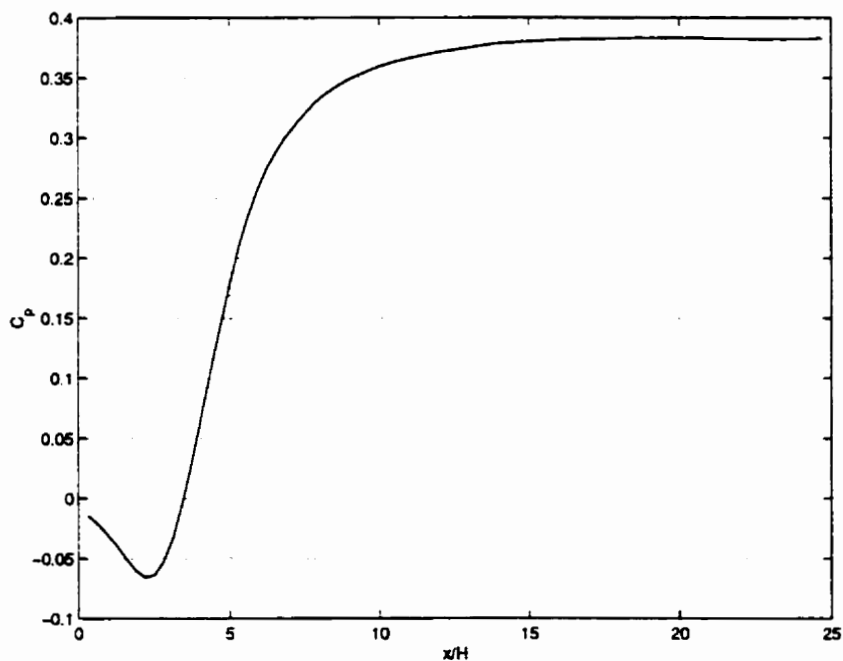


Figure 6.20 Distribution du coefficient de pression C_p le long de la paroi inférieure sur le plan longitudinal central de la marche.

6.2.5 Mémoire et temps de calcul requis

Nous avons recueilli au tableau 6.3 les données concernant la mémoire et le temps de calcul (CPU) qu'ont nécessités les simulations des grandes échelles avec l'approche dynamique mixte. Nous avons également indiqué l'efficacité globale atteinte avec le super-calculateur NEC-SX5 pour les simulations relatives aux Maillage 3 et Maillage 4 puisqu'elles permettent d'obtenir les résultats les plus proches des valeurs expérimentales. Comme on peut le constater, le tableau 6.3 indique que la mémoire requise est considérable avec l'utilisation du Maillage 4 puisque cette simulation nécessite 1 Gigaoctet. Il faut cependant considérer qu'il est de plus en plus courant d'avoir accès à des calculateurs possédant plus d'un Gigaoctet de mémoire. Le temps de calcul est certainement le paramètre le plus contraignant car la simulation avec le Maillage 4 a nécessité 390 heures (16 jours) de calculs. Cette durée de calcul permet la simulation du comportement de l'écoulement pendant 17 temps de résidence, ce qui nous assure de l'atteinte de la convergence statistique des résultats. Des expériences numériques nous ont indiqué que 12 à 15 passages dans le domaine de calcul s'avèrent suffisants pour le calcul des différents paramètres tels la longueur moyenne de rattachement, les champs moyens de vitesse et l'intensité de turbulence.

Tableau 6.3 Mémoire, temps de calcul et efficacité de calcul pour les simulations LES effectuées avec l'ADM. Cas où $Re_H = 11000$.

Maillage	Mémoire requis	Temps de calcul	Efficacité globale
Maillage 3	576 Mégaoctets	160 heures	1.7 Gflops
Maillage 4	1 Gigaoctet	390 heures	1.9 Gflops

6.2.6 Comparaison avec le modèle $k - \epsilon$

Des calculs numériques bidimensionnels de l'écoulement derrière la marche d'Eaton, 1980 où $Re_H = 11000$ ont été effectués en utilisant une modélisation statistique de type $k - \epsilon$. Ces calculs ont été réalisés en utilisant une méthode d'éléments finis avec adaptation du maillage par une technique de projection locale. Les détails concernant la discrétisation des équations, l'implantation du modèle $k - \epsilon$ et la technique d'adaptation sont présentés dans le mémoire de Turgeon, 1997.

Il est essentiel à ce stade d'effectuer la mise en garde suivante: nous comparerons les résultats obtenus de la méthode LES et du modèle $k - \epsilon$ pour des maillages respectivement très différents. En effet, la modélisation $k - \epsilon$ est réalisée sur un domaine bidimensionnel alors que la simulation LES est effectuée quant à elle dans un domaine tridimensionnel. De plus, la méthode LES nécessite un grand nombre de points de discrétisation près des parois solides afin de bien représenter les forts gradients de vitesse qui s'y trouvent contrairement au modèle $k - \epsilon$ qui utilise une loi de paroi. Par ailleurs, la modélisation $k - \epsilon$ est employée avec un maillage adaptatif présentant une très grande densité de cellules de discrétisation tandis que celui utilisé pour la simulation LES comporte des concentrations d'éléments structurés dont le nombre de cellules est limité pour une question de temps de calcul requis¹⁵. Il est cependant clair que l'approche LES est beaucoup plus coûteuse en temps de calcul que la modélisation $k - \epsilon$.

Nous comparons donc les résultats convergés en maillage obtenus par le modèle $k - \epsilon$ avec ceux de la simulation LES correspondant au maillage le plus fin (Maillage 4) en utilisant l'ADM. Le tableau 6.4 présente les longueurs moyennes de rattachement

¹⁵Dans le plan bidimensionnel (plan xy), le maillage utilisé lors de la modélisation $k - \epsilon$ comporte 6.5 fois plus de points de discrétisation que le maillage le plus fin de la simulation LES.

prédites par l'approche LES et le modèle $k - \epsilon$. Ce tableau révèle, comme nous l'avons montré précédemment, l'excellente habileté de l'approche LES à capter adéquatement la longueur moyenne de rattachement avec une erreur de relative de 1.5% alors qu'elle est de 11% lorsque nous utilisons le modèle $k - \epsilon$.

Tableau 6.4 Comparaison de la longueur moyenne de rattachement obtenue avec la simulation LES et la modélisation $k - \epsilon$ pour le cas où $Re_H = 11000$.

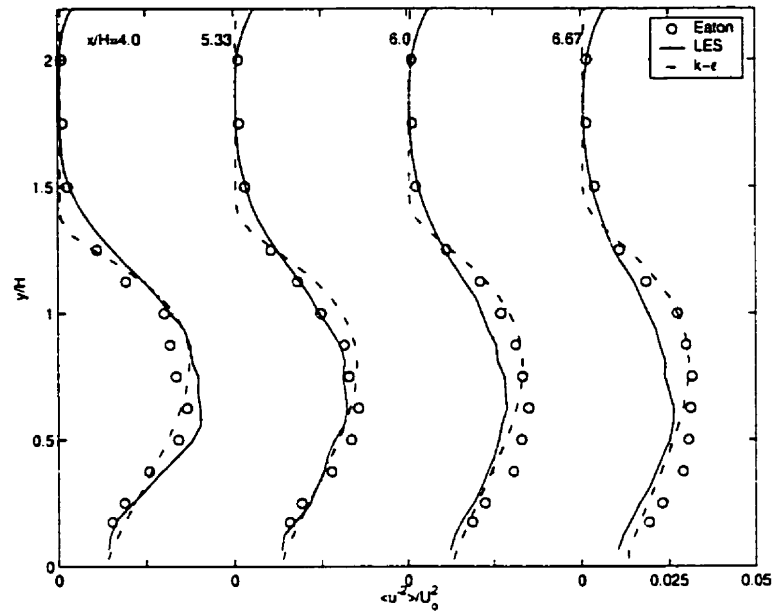
Cas Analysé	Longueur de rattachement	Erreur relative
Expérience d'Eaton, 1980	7.0	-
Simulation LES ADM - Maillage 4	7.1	1.5%
Modélisation $k - \epsilon$ maillage adaptatif	6.2	11%

Les figures 6.21 (a) et 6.21 (b) montrent la distribution de l'intensité de turbulence axiale $\langle u'^2 \rangle / U_o^2$ à différentes positions longitudinales de la marche. Dans la zone de recirculation (figure 6.21 (a)) les résultats prévus par l'approche LES et la modélisation $k - \epsilon$ sont similaires et très proches des valeurs expérimentales. Cependant, au niveau de la zone de recouvrement (figure 6.21 (b)), la modélisation $k - \epsilon$ présente des niveaux d'intensité de turbulence axiale concordant mieux avec ceux de l'expérience. Le maillage utilisé pour la simulation LES n'est probablement pas encore suffisamment fin pour tenir compte de l'influence de petites structures turbulentes en aval de la zone de recirculation qui contribuent fortement à la quantité turbulente $\langle u'^2 \rangle / U_o^2$. Même si le maillage utilisé lors de la simulation LES est adéquat pour la prédiction de la longueur de recirculation, il s'avère toutefois insuffisamment fin dans le plan bidimensionnel (plan xy) pour l'intensité de turbulence axiale. Comme nous l'avons présenté à la sous-section

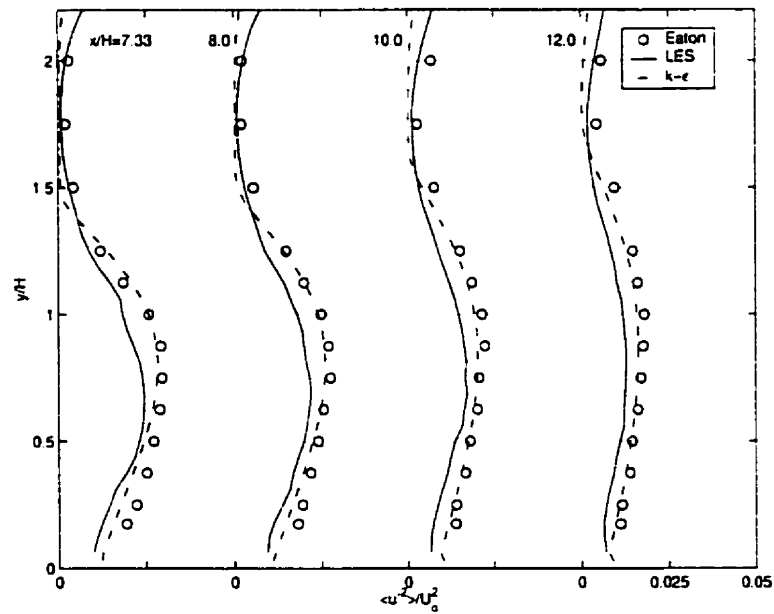
6.2.4.4, l'utilisation du Maillage 4 engendre de meilleurs niveaux d'intensité de turbulence que ceux obtenus avec le Maillage 3. Ceci nous permet donc de présumer qu'une simulation LES avec un maillage encore plus fin résulterait en une meilleure prédiction de $\langle u'^2 \rangle / U_o^2$. Ce raffinement de maillage n'entraînerait évidemment pas en une discrétisation spatiale de simulation directe (DNS) puisque par exemple, la simulation directe de l'écoulement derrière une marche descendante effectuée par Le *et al.*, 1997 pour $Re_H = 5100$ a nécessité une discrétisation de 6 300 000 cellules. En raffinant davantage le Maillage 4 qui comporte 927 360 cellules, nous sommes encore loin d'atteindre le niveau de finesse en maillage qui serait nécessaire pour réaliser une simulation directe de la marche d'Eaton, 1980 à $Re_H = 11000$.

L'analyse comparative présentée dans cette section démontre que, bien qu'un maillage adaptatif possédant une grande densité de points de discrétisation ait été employé, le calcul de l'écoulement avec la modélisation $k - \epsilon$ est limité par les hypothèses sous-jacentes à cette modélisation, notamment au niveau de la zone de recirculation¹⁶. Quant à la simulation LES, elle s'avère représenter fidèlement l'interaction entre la couche de cisaillement et la zone de recirculation permettant d'obtenir ainsi une excellente prédiction de la longueur moyenne de rattachement. Les résultats présentés permettent d'affirmer que la simulation LES représente adéquatement la physique de la turbulence mais qu'elle comporte une limitation au niveau de la finesse du maillage pouvant être utilisé puisque le temps de calcul ne doit pas être démesuré.

¹⁶À la section 1.3.1, nous avons indiqué les principales hypothèses sur lesquelles repose la modélisation $k - \epsilon$.



(a) Zone de recirculation: $x/H = 4.0, 5.33, 6.0$ et 6.67



(b) Zone de recouvrement: $x/H = 7.33, 8.0, 10.0$ et 12.0

Figure 6.21 Distribution de l'intensité de turbulence axiale $\langle u'^2 \rangle / U_o^2$: comparaison des résultats de l'approche LES (ADM avec Maillage 4) et de la modélisation $k - \epsilon$. Cas où $Re_H = 11000$.

6.2.7 Champs instantanés de l'écoulement

Un exemple du champ des vecteurs de la vitesse instantanée au niveau du plan longitudinal central (plan xy à $z/H = 4$) est illustré à la figure 6.22. Cette figure est un agrandissement de la zone de recirculation qui comporte visiblement une forte activité tourbillonnaire. La figure 6.23 montre quant à elle l'enchevêtrement des structures tourbillonnaires dans le plan de l'envergure (plan yz) à une position longitudinale se situant dans la zone de recirculation soit $x/H = 5$. Les figures 6.22 et 6.23 illustrent bien la complexité tridimensionnelle de l'écoulement qui se développe derrière la marche descendante. La figure 6.24 met quant à elle en évidence les variations spatiales du champ instantané de la composante de vitesse \bar{u} au même moment. Elle illustre bien la présence des structures dynamiques dites à grandes échelles de l'écoulement. Ces structures sont intenses et visibles surtout près de la marche au niveau de la couche de cisaillement (vortex rouges ou oranges) alors qu'elles sont progressivement atténuées à mesure que l'on s'approche de la frontière de sortie de l'écoulement. D'autres structures tourbillonnaires (vortex bleus foncés ou bleus clairs sur la figure 6.24) se développent également dans la région de la paroi inférieure près de la marche (zone de recirculation) et interagissent donc fortement avec la couche de cisaillement.



Figure 6.22 Champ des vecteurs de la vitesse instantanée dans le plan longitudinal central (plan xy à $z/H = 4$) au temps $t = 962H/U_o$. Cas où $Re_H = 11000$, utilisation de l'ADM avec le Maillage 3. Agrandissement de la zone de recirculation.

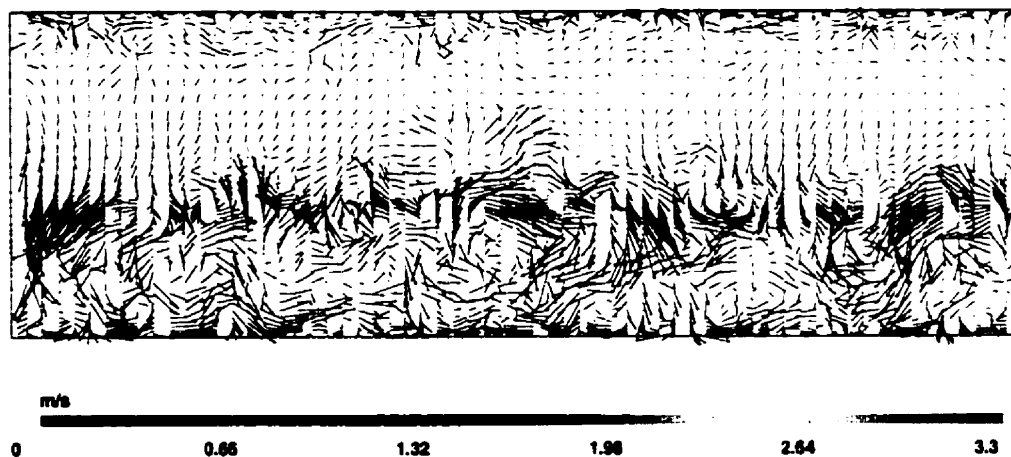


Figure 6.23 Champ des vecteurs de la vitesse instantanée dans le plan de l'envergure (plan yz) à $x/H = 5$ au temps $t = 962H/U_o$. Cas où $Re_H = 11000$. utilisation de l'ADM avec le Maillage 3.

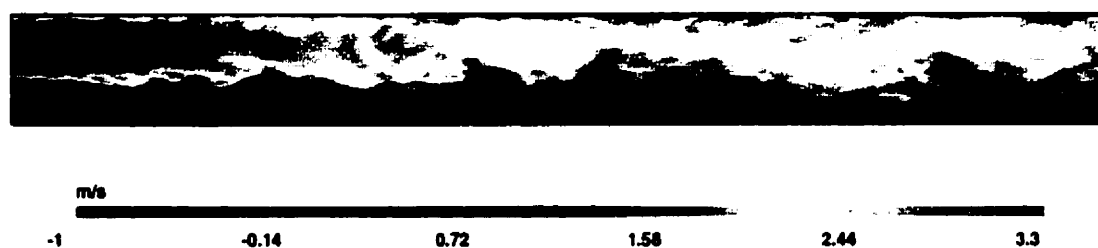


Figure 6.24 Champ instantané de la composante de vitesse \bar{u} dans le plan longitudinal central (plan xy à $z/H = 4$) au temps $t = 962H/U_o$. Cas où $Re_H = 11000$, utilisation de l'ADM avec le Maillage 3.

6.3 Simulation de la marche avec $Re_H = 39000$

À notre connaissance, la majorité des simulations LES rapportées dans la littérature à propos de l'écoulement que nous avons étudié sont généralement des écoulements dont le nombre de Reynolds ne dépasse pas 10000, à moins qu'une loi de paroi ne soit utilisée. Nous vérifions donc dans cette section la capacité de la méthode de simulation des grandes échelles (LES) à représenter adéquatement l'écoulement tridimensionnel se développant derrière une marche pour un nombre de Reynolds relativement élevé, soit 39000.

6.3.1 Conditions initiales et frontières

Avec $Re_H = 39000$, les conditions initiales et frontières sont identiques à celles de la simulation de la marche avec $Re_H = 11000$ (section 6.2.1) à l'exception de la condition frontière d'entrée pour laquelle nous imposons le profil moyen de vitesse de l'expérience correspondant au nombre de Reynolds étudié ici. En considérant qu'Eaton, 1980 indique que la couche limite expérimentale se situe entre un état de transition et un état turbulent et qu'il rapporte une faible intensité de turbulence correspondant à $\sqrt{\langle u'^2 \rangle}/U_o \approx 0.3\%$ au niveau du canal d'entrée, nous avons, comme le font Neto *et al.*, 1993, superposé au profil moyen de vitesse de faibles fluctuations aléatoires de vitesse. Les amplitudes de ces dernières sont de l'ordre de $10^{-4} * U_o$ et sont donc légèrement plus faibles que l'intensité de turbulence mesurée dans l'expérience d'Eaton, 1980. Neto *et al.*, 1993 ont indiqué que la spécification d'une intensité de turbulence plus faible que celle de l'expérience engendrait des champs moyennés réalistes. Ces derniers mentionnent que ces fluctuations aléatoires simulent grossièrement la turbulence résiduelle existant en amont du canal d'expansion et qu'en l'absence de celles-ci, l'écoulement derrière la marche d'Eaton,

1980 est toujours turbulent.

6.3.2 Discrétisation spatiale et temporelle

Le tableau 6.5 spécifie la discrétisation spatiale employée dans les directions axiale, verticale et de l'envergure pour chacun des 2 maillages utilisés, de même que la discrétisation temporelle (pas de temps) correspondante. Avec $Re_H = 39000$, les calculs numériques comportent une contrainte importante quant au choix de la discrétisation temporelle permise, puisque celle-ci doit respecter le critère de stabilité de Courant. Pour cette raison, la durée de temps de moyennage a été fixée à approximativement 10 temps caractéristiques de résidence avec le Maillage 6 ce qui permet de respecter la limite supérieure de 360 heures (15 jours) de temps de calcul sur le NEC-SX5.

Tableau 6.5 Discrétisation spatiale et temporelle employée lors de la simulation de la marche d'Eaton, 1980. Cas où $Re_H = 39000$.

Maillage	Discrétisation spatiale	$\Delta x/H$	$\Delta y_{min,inf}/H$ $\Delta y_{min,sup}/H$	$\Delta z/H$	Discrétisation temporelle
Maillage 5	$180 \times 48 \times 64$: 552960 cellules	0.139	7.76×10^{-3} 1.16×10^{-2}	0.123	$1.15 \times 10^{-2} \frac{H}{U_o}$
Maillage 6	$230 \times 56 \times 64$: 824320 cellules	0.109	7.61×10^{-3} 1.14×10^{-2}	0.109	$4.58 \times 10^{-3} \frac{H}{U_o}$

Pour les deux maillages présentés au tableau 6.5, les modèles de sous-maille de fonction de structure, de l'approche dynamique classique et de l'approche dynamique mixte ont été testés. Une discrétisation uniforme a été choisie pour la direction longitudinale et celle de l'envergure alors qu'une discrétisation concentrée a été adoptée pour la direction verticale. Comme pour le cas où $Re_H = 11000$, nous avons déterminé la densité du maillage près des parois solides (parois inférieure et

supérieure) ainsi que dans la couche de cisaillement de l'écoulement par une loi de concentration hyperbolique, puisque ces zones comportent des gradients élevés de vitesse. La figure 6.25 montre le niveau de raffinement et de concentration du Maillage 6 dans les zones se trouvant près des parois solides inférieure et supérieure, de même que dans la zone de la couche de cisaillement.



Figure 6.25 Maillage le plus fin employé pour la simulation des grandes échelles au niveau du canal d'expansion de la marche. Maillage 6 du tableau 6.5.

6.3.3 Champs moyens de l'écoulement

6.3.3.1 Longueur moyenne de rattachement: x_r/H

Le premier paramètre de comparaison avec l'expérience d'Eaton, 1980 est la longueur moyenne de rattachement. Le tableau 6.6 consigne les résultats obtenus pour les longueurs moyennes de rattachement déterminées par la méthode dite "p.d.f" que nous avons décrite à la section 6.2.4.1. La figure 6.26 montre le pourcentage du temps total de moyennage pour lequel le fluide se trouvant près de la paroi inférieure s'écoule dans la direction aval en fonction de la position longitudinale pour le cas où l'on utilise l'ADM avec le Maillage 6. Comme l'indique cette figure, la longueur moyenne de rattachement obtenue par la méthode "p.d.f" est de 7.8.

Comme le montre le tableau 6.6, la longueur moyenne de rattachement obtenue avec le modèle de fonction de structure est beaucoup plus courte que la valeur expérimentale. Ainsi, avec le Maillage 6, l'erreur relative par rapport à la valeur expé-

Tableau 6.6 Longueurs moyennes de rattachement obtenues avec le code DFMAC selon les différents maillages spécifiés au tableau 6.5 et modèles de sous-maille choisis. Cas où $Re_H = 39000$. Valeur expérimentale obtenue par Eaton, 1980: $x_r/H = 8.0 \pm 0.1$.

Modèle de de sous-maille	Discretisation spatiale	
	Maillage 5	Maillage 6
Fonction de structure	$x_r/H = 5.6$	$x_r/H = 6.0$
Approche dynamique classique (ADC)	$x_r/H = 6.4$	$x_r/H = 7.5$
Approche dynamique mixte (ADM)	$x_r/H = 7.0$	$x_r/H = 7.8$

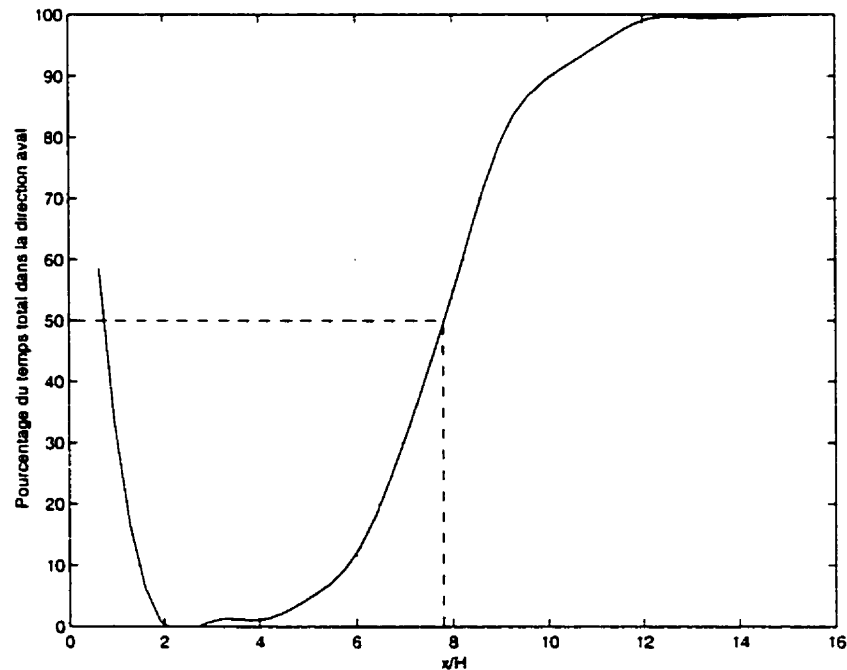


Figure 6.26 Courbe illustrant le pourcentage du temps total pour lequel le fluide se trouvant près de la paroi inférieure se dirige dans la direction aval en fonction de la position longitudinale. Cas où $Re_H = 39000$, utilisation de l'ADM avec le Maillage 6.

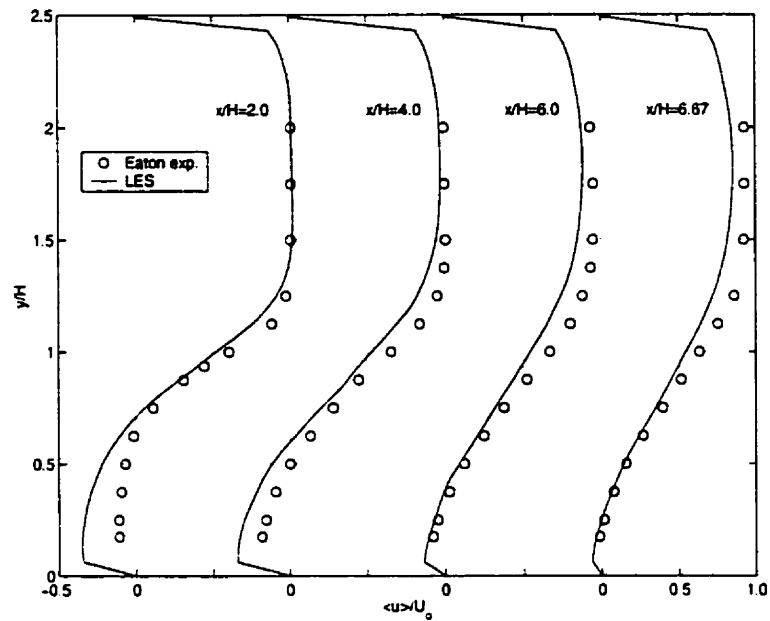
mentale est d'environ 25%. Comme pour la simulation effectuée avec $Re_H = 11000$, ce résultat est dû à l'utilisation de la relation de Van Driest qui amortit la viscosité de sous-maille jusqu'aux parois solides ce qui ne représente pas convenablement le comportement asymptotique de ce paramètre dans la zone de recirculation. Il vaut mieux recourir aux approches dynamiques classiques et mixtes qui offrent intrinsèquement un comportement adéquat près des parois solides. Celles-ci prédisent respectivement des longueurs moyennes de rattachement de $x_r/H = 7.5$ et de $x_r/H = 7.8$ qui se conforment très bien à la valeur expérimentale $x_r/H = 8.0 \pm 0.1$. Un calcul de l'erreur relative donne respectivement 6.3% et 2.5% d'écart par rapport à la valeur expérimentale d'Eaton, 1980 pour les résultats obtenus par l'ADC et l'ADM.

6.3.3.2 Distribution de la vitesse moyenne axiale: $\langle \bar{u} \rangle / U_o$

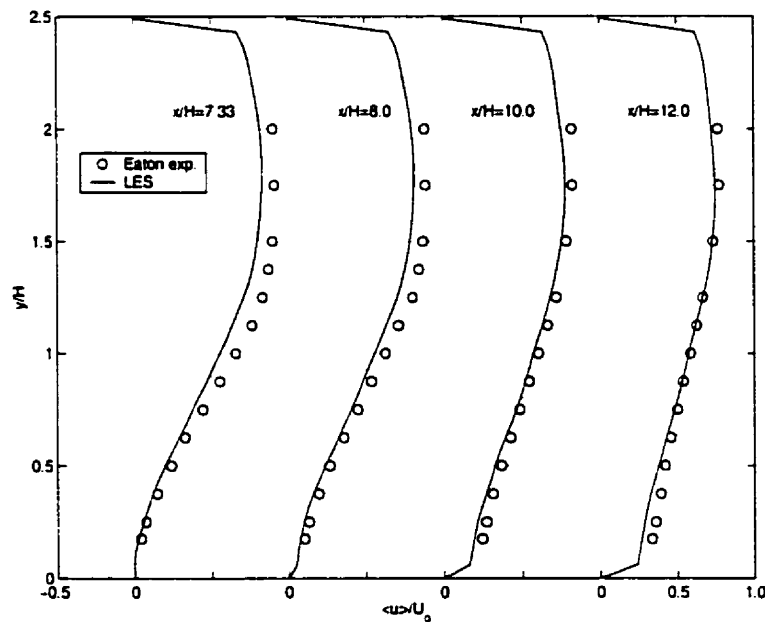
La prédiction de la distribution de la vitesse moyenne axiale avec l'ADC présente des résultats très similaires à ceux obtenus en employant l'ADM sauf dans la zone de recirculation. Les figures 6.27 (a) et 6.27 (b) montrent la distribution de la vitesse moyenne axiale $\langle \bar{u} \rangle / U_o$ à différentes positions longitudinales de la marche telles qu'obtenues avec l'ADM et le Maillage 6. Ces figures indiquent une très bonne représentation du champ moyen de la vitesse axiale dans les zones de recirculation et de recouvrement de l'écoulement¹⁷.

Le champ des vecteurs de la vitesse moyenne obtenu sur le plan longitudinal central ($z/H = 3.45$) est illustré à la figure 6.28 alors que les isovaleurs de la composante de vitesse axiale $\langle \bar{u} \rangle$ sont montrées à la figure 6.29. Quant à la figure 6.30, elle met en évidence la distribution de la vitesse moyenne axiale en unité de paroi près de la

¹⁷Précisons qu'en vertu du résultat obtenu pour la longueur moyenne de rattachement, la position $x/H = 7.33$ de la figure 6.27 (b) se trouve dans la zone de recirculation de l'écoulement.



(a) Zone de recirculation: $x/H = 2.0, 4.0, 6.0$ et 6.67



(b) Zone de recouvrement: $x/H = 7.33, 8.0, 10.0$ et 12.0

Figure 6.27 Comparaison des résultats numériques obtenus avec l'ADM et les mesures expérimentales Eaton, 1980: profil de la vitesse moyenne $\langle \bar{u} \rangle / U_o$ sur le plan longitudinal central ($z/H = 3.45$). Cas où $Re_H = 39000$, utilisation du Maillage 6.

paroi inférieure pour les positions longitudinales $x/H = 15, 20$ et 24 . Cette figure indique que la sous-couche visqueuse n'est pas adéquatement captée par le niveau de concentration du Maillage 6 puisqu'un seul point de discrétisation se situe dans cette région à la position verticale $y^+ \approx 3$. Il faudrait typiquement obtenir au moins trois points de discrétisation dans la sous-couche visqueuse. La distribution de vitesse au niveau de la zone logarithmique est cependant bien approchée notamment pour les positions $x/H = 20$ et 24 . En vertu des résultats obtenus dans la sous-couche visqueuse et dans la zone logarithmique, il est indéniable qu'un maillage plus fin que celui du Maillage 6 devrait être employé. Cependant, comme nous l'avons présenté au tableau 6.6 et aux figures 6.27 (a) et 6.27 (b), les quantités moyennes de longueur de rattachement et de distribution de la vitesse axiale concordent néanmoins très bien avec les mesures expérimentales.

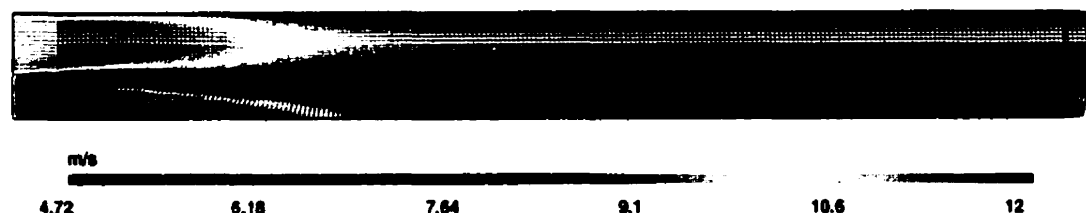


Figure 6.28 Champ des vecteurs de la vitesse moyenne sur le plan central ($z/H = 3.45$). Cas où $Re_H = 39000$, utilisation de l'ADM avec le Maillage 6.

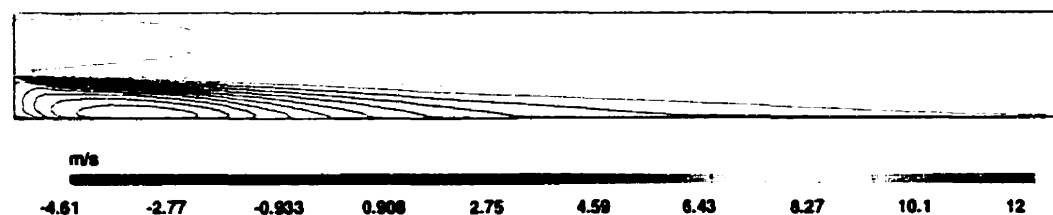


Figure 6.29 Isovaleurs de la composante de vitesse axiale $\langle \bar{u} \rangle$. Cas où $Re_H = 39000$, utilisation de l'ADM avec le Maillage 6.

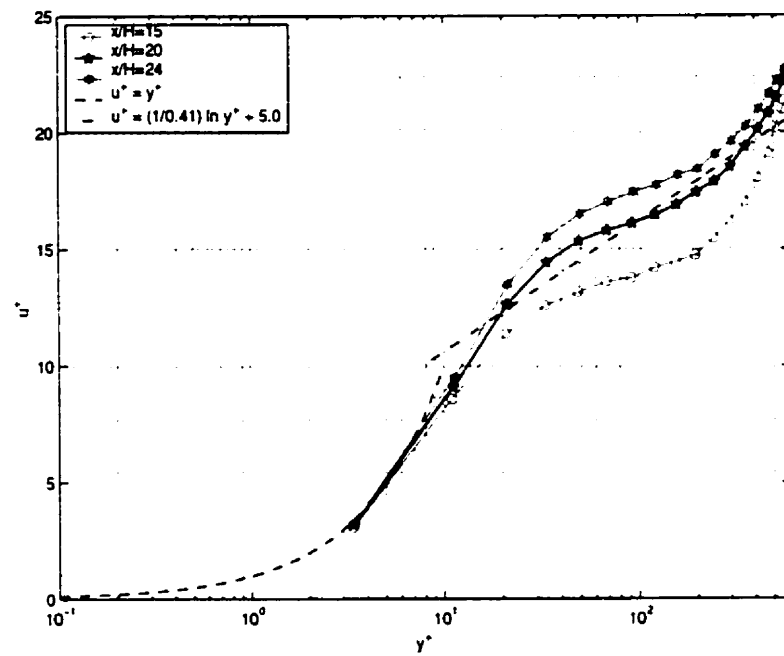
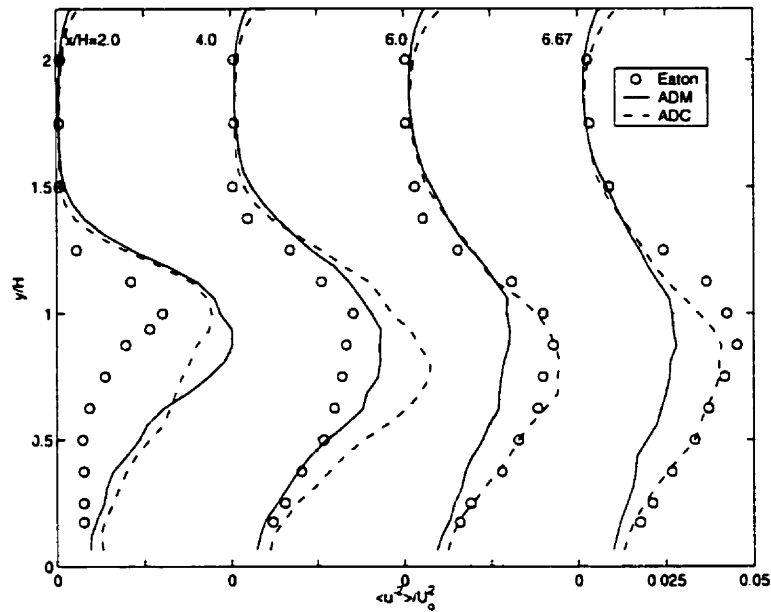


Figure 6.30 Distribution de la composante de vitesse axiale u^+ aux positions longitudinales $x/H = 15, 20$ et 24 en fonction de la distance verticale y^+ au-dessus de la paroi inférieure. Cas où $Re_H = 39000$, utilisation de l'ADM avec le Maillage 6.

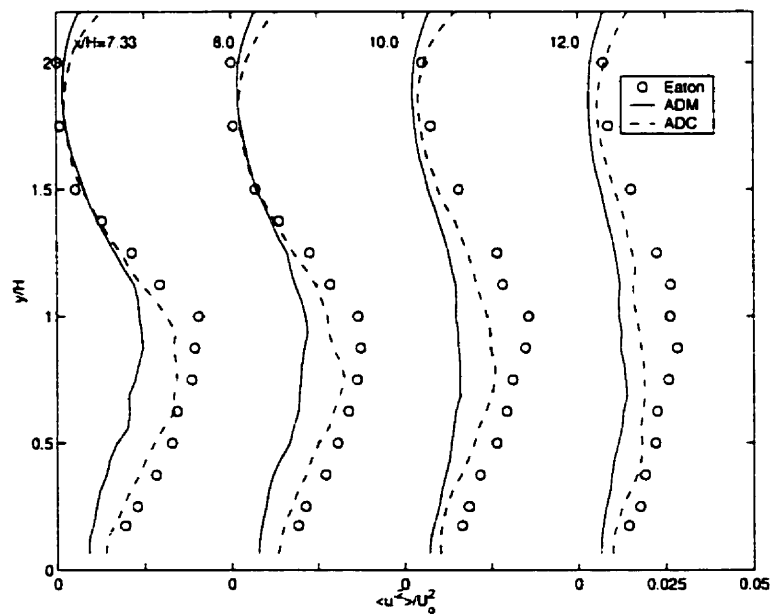
6.3.3.3 Intensité de turbulence axiale: $\langle u'^2 \rangle / U_o^2$

Les figures 6.31 (a) et 6.31 (b) illustrent les distributions de l'intensité de turbulence axiale $\langle u'^2 \rangle / U_o^2$ obtenues par l'utilisation de l'ADM et l'ADC à différentes positions longitudinales avec le Maillage 6. Ces figures indiquent qu'aux positions $x/H = 2$ et 4, les deux approches surestiment l'intensité de turbulence axiale alors qu'à partir de $x/H \geq 6$, les prédictions obtenues avec l'ADC correspondent mieux aux valeurs expérimentales. Comme nous l'avons fait pour le cas $Re_H = 11000$, nous effectuerons ici une analyse de l'évolution du taux de décroissance de $\langle u'^2 \rangle / U_o^2$. La figure 6.32 montre le comportement de l'intensité de turbulence à $y/H = 0.75$ pour différentes positions longitudinales. Elle révèle que les deux approches dynamiques ne prédisent pas correctement l'accroissement de $\langle u'^2 \rangle / U_o^2$ entre les positions $x/H = 4$ et $x/H = 6.67$. Ceci peut certainement être attribué au fait que le maillage utilisé dans cette région est insuffisamment fin. Aux positions $x/H \geq 7$, les deux approches dynamiques présentent une décroissance similaire et proche de celle obtenue par Eaton, 1980, bien que les résultats soient sous-estimés.

À la sous-section 6.2.4.4, nous avons démontré qu'en raffinant le maillage, l'utilisation de l'ADM engendrait des niveaux d'intensité de turbulence axiale se rapprochant des valeurs d'Eaton, 1980 alors que l'utilisation de l'ADC produisait l'effet contraire. Il serait donc intéressant de pouvoir réaliser ici une autre étude de raffinement de maillage qui n'a cependant pas été entreprise étant donné l'important temps de calcul requis pour effectuer ces simulations. Nous considérons que les calculs numériques réalisés avec le Maillage 6 présentent un intérêt réel dans la mesure où ils démontrent la capacité de l'approche LES à simuler l'écoulement turbulent derrière une marche pour un nombre de Reynolds relativement élevé.



(a) Zone de recirculation: $x/H = 2.0, 4.0, 6.0$ et 6.67



(b) Zone de recouvrement: $x/H = 7.33, 8.0, 10.0$ et 12.0

Figure 6.31 Distribution de l'intensité de turbulence axiale $\langle u'^2 \rangle / U_o^2$ sur le plan longitudinal central ($z/H = 3.45$). Cas où $Re_H = 39000$, utilisation de l'ADM et de l'ADC avec le Maillage 6.

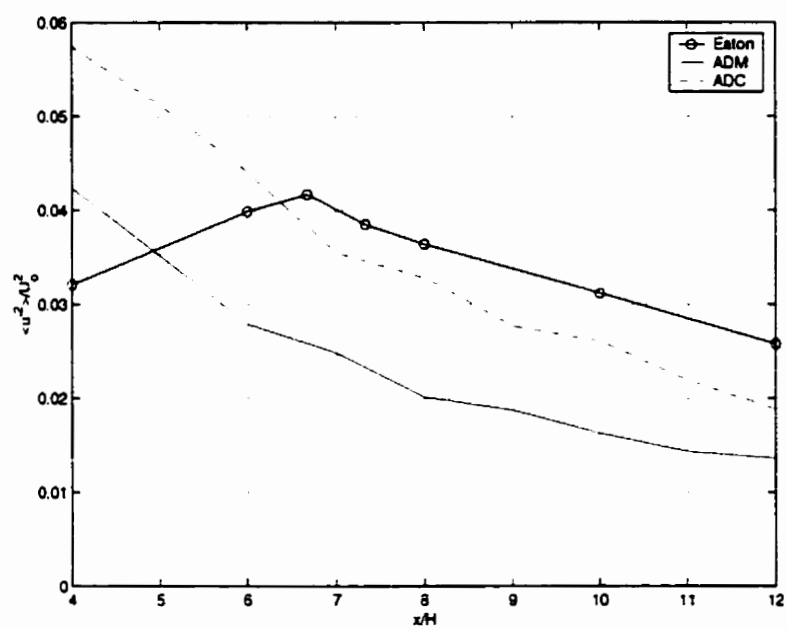


Figure 6.32 Évolution de l'intensité de turbulence axiale $\langle u'^2 \rangle / U_o^2$ selon la direction longitudinale. Cas où $Re_H = 39000$, utilisation de l'ADM et de l'ADC avec le Maillage 6 sur le plan longitudinal central à $y/H = 0.75$.

La figure 6.33 illustre les profils de l'énergie cinétique de turbulence k/U_o^2 obtenus avec l'ADM et l'ADC à différentes positions longitudinales avec le Maillage 6¹⁸. Cette figure révèle que l'énergie cinétique de turbulence prévue avec l'ADC est mieux représentée qu'avec l'ADM, ce que nous pouvions présager, puisque nous avons montré aux figures 6.31 (a) et 6.31 (b) que l'intensité de turbulence axiale est supérieure avec l'ADC.

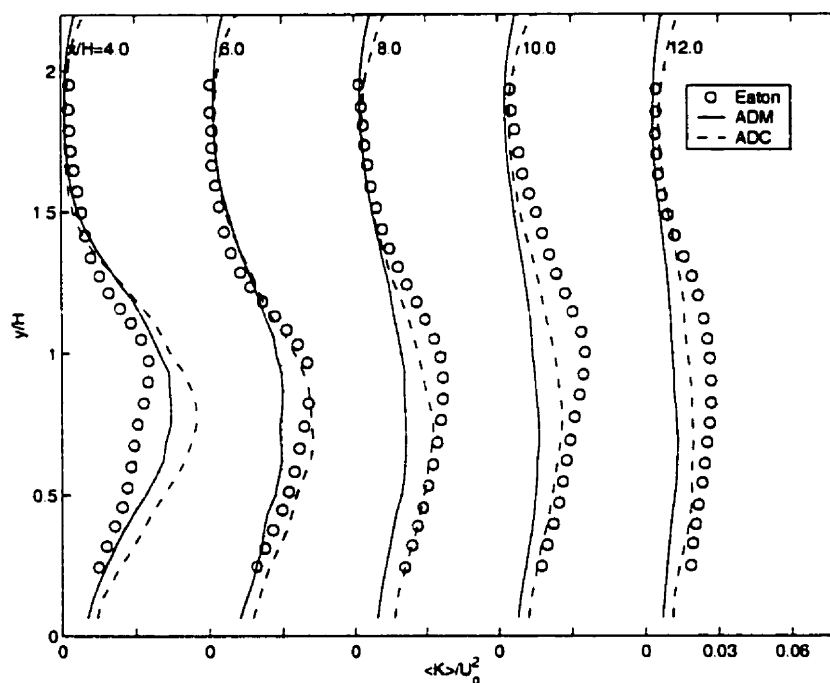


Figure 6.33 Distribution de l'énergie cinétique de turbulence k/U_o^2 sur le plan longitudinal central ($z/H = 3.45$). Cas où $Re_H = 39000$, utilisation de l'ADM et de l'ADC avec le Maillage 6.

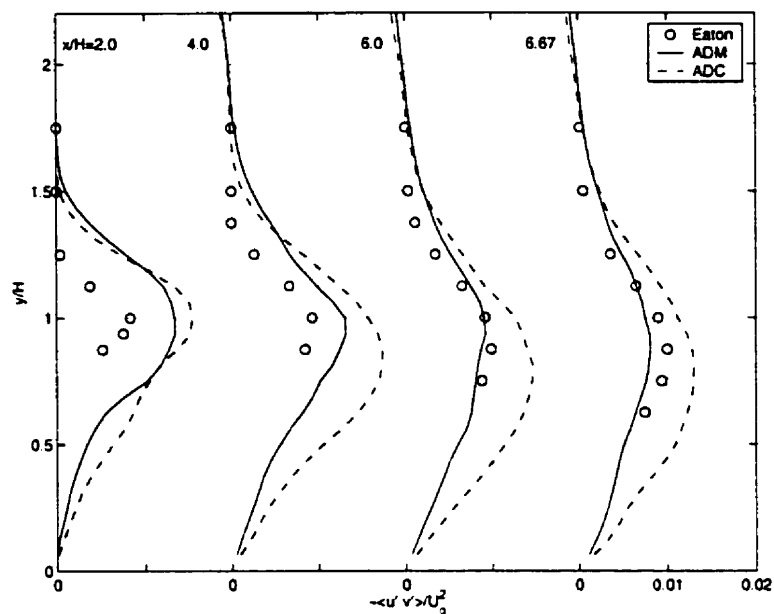
¹⁸Rappelons que l'énergie cinétique de turbulence est définie par la relation suivante: $k = 1/2(\langle u'^2 \rangle + \langle v'^2 \rangle + \langle w'^2 \rangle)$.

6.3.3.4 Tenseur de Reynolds: $-\langle u' v' \rangle / U_o^2$

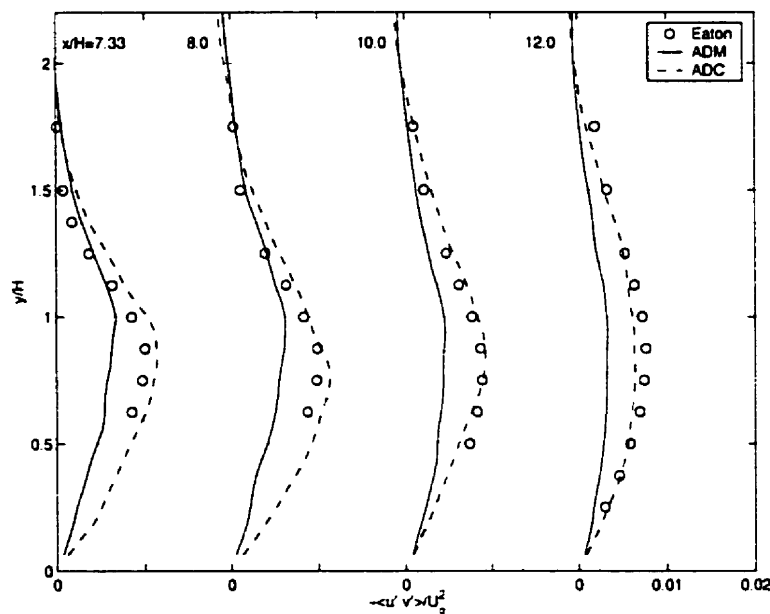
Un autre paramètre très important caractérisant un écoulement turbulent est le tenseur de Reynolds $-\langle u' v' \rangle / U_o^2$. Celui-ci reflète l'influence de la turbulence sur le mouvement moyen de l'écoulement. Pour le cas où $Re_H = 39000$, Eaton, 1980 a mesuré l'amplitude de ce tenseur pour différentes positions longitudinales dont on retrouve la distribution de même que celle des prédictions de notre code obtenues avec l'ADM et l'ADC aux figures 6.34 (a) et 6.34 (b). Ces figures indiquent que l'influence de la turbulence se manifeste fortement au niveau de la couche de cisaillement (position verticale $0.75 \leq y/H \leq 1.25$) puisque le tenseur de Reynolds est intense dans cette région. Les figures 6.34 (a) et 6.34 (b) montrent également qu'aux positions $x/H = 4.6$ et 6.67 , les valeurs du tenseur de Reynolds prédites par l'ADM sont plus justes que celles prévues par l'ADC. Cependant, pour les positions $x/H \geq 7.33$, les valeurs obtenues de l'ADC concordent très bien avec les valeurs expérimentales alors que l'ADM sous-évalue l'intensité du tenseur de Reynolds. Encore une fois, il y aurait lieu, comme nous l'avons indiqué à la sous-section 6.3.3.3, d'effectuer une simulation des grandes échelles avec un maillage plus fin que celui du Maillage 6 afin de nous assurer de la validité des résultats obtenus et pour pouvoir évaluer plus judicieusement les performances de l'ADM et l'ADC.

6.3.3.5 Comparaison entre l'ADC et l'ADM

La simulation de la turbulence se développant derrière la marche descendante d'Eaton, 1980 a révélé que l'utilisation de l'ADC ou de l'ADM engendrait des résultats concordant très bien avec les mesures expérimentales notamment pour des quantités telles la longueur moyenne de rattachement et la distribution de la vitesse



(a) Zone de recirculation: $x/H = 2.0, 4.0, 6.0$ et 6.67



(b) Zone de recouvrement: $x/H = 7.33, 8.0, 10.0$ et 12.0

Figure 6.34 Distribution du tenseur de Reynolds $-\langle u'v' \rangle / U_o^2$ sur le plan longitudinal central ($z/H = 3.45$). Cas où $Re_H = 39000$, utilisation de l'ADM et de l'ADC avec le Maillage 6.

moyenne axiale. Cependant, des différences marquées entre ces deux approches dynamiques ont été observées pour l'intensité de turbulence axiale, le tenseur de Reynolds et l'énergie cinétique de turbulence. En effet, pour ces quantités turbulentes, les résultats obtenus avec l'ADC se conforment globalement mieux avec ceux de l'expérience alors que les résultats issus de l'ADM sont sous-évalués. Tel que déjà évoqué, nous estimons que l'ADC modélise une quantité plus importante de réinjection d'énergie vers les grandes échelles entraînant ainsi une énergie de turbulence plus élevée. Quant à l'ADM, le tenseur de Léonard modifié calcule explicitement la réinjection de l'énergie, un maillage plus fin s'avèrerait sans doute nécessaire pour représenter adéquatement la quantité relative à ce retour d'énergie. Ces suppositions s'appuient sur le comportement observé à la sous-section 6.2.4.4 (cas où $Re_H = 11000$) où nous avons montré qu'en densifiant le maillage, la simulation utilisant l'ADM produisait des niveaux d'intensité de turbulence axiale se rapprochant des valeurs expérimentales alors que l'utilisation de l'ADC produisait l'effet inverse, soit une surévaluation de l'énergie de turbulence axiale.

6.3.3.6 Analyse spectrale

Comme nous l'avons évalué pour le cas où $Re_H = 11000$, nous effectuons ici une analyse spectrale afin de vérifier que l'énergie cinétique de turbulence contenue dans les grandes échelles est bel et bien transférée vers les tourbillons de plus petites échelles. La figure 6.35 illustre le spectre fréquentiel de la composante de fluctuation axiale u'^2 à la position $x/H = 20$, $y/H = 1$ et $z/H = 3.45$ en fonction du nombre de Strouhal qui est défini par $St = fH/U_o$ où f est la fréquence du signal temporel. Cette figure montre que l'énergie se trouvant aux petits nombres de Strouhal se transfère vers les plus petites échelles résolues avec un taux de décroissance très proche de celui prévu par la théorie de Kolmogorov dans la zone

inertielle et qui est proportionnel à $-5/3$. On constate à la figure 6.35 que l'énergie associée aux grandes fréquences (petites échelles) est inférieure d'au moins deux ordres de grandeur à l'énergie maximale se trouvant aux basses fréquences (grandes échelles), ce qui satisfait le critère émis par Ferziger, 1995 concernant la capacité du modèle de sous-maille à bien représenter la dissipation de l'énergie. Grâce à cette analyse, on peut affirmer que le maillage utilisé lors de cette simulation des grandes échelles est convenable.

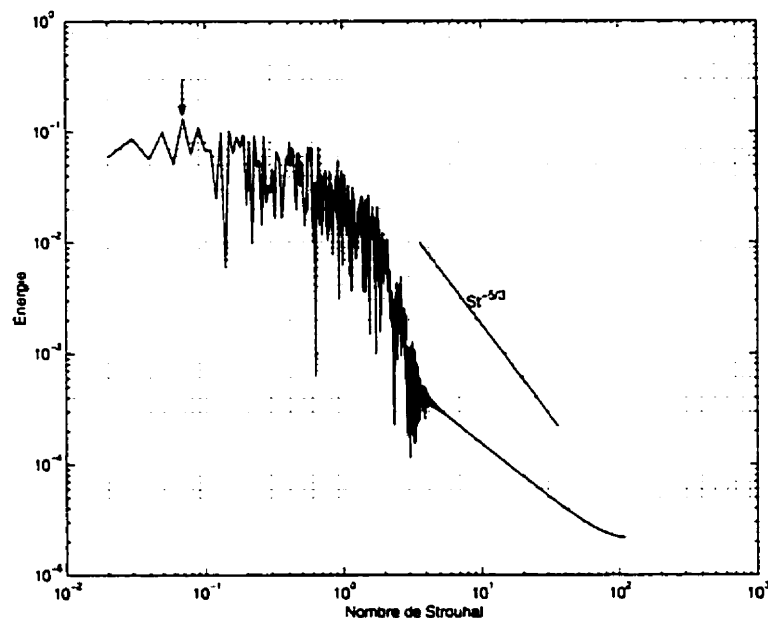


Figure 6.35 Spectre fréquentiel de la composante de fluctuation axiale u'^2 en fonction du nombre de Strouhal St à la position $x/H = 20$, $y/H = 1$ et $z/H = 3.45$. Période d'observation correspondant à $T_o = 100H/U_o$. Cas où $Re_H = 39000$, utilisation de l'ADM avec Maillage 6.

Il est également intéressant de vérifier la fréquence correspondant à l'énergie maximale du spectre d'énergie. La figure 6.35 indique que cette énergie maximale survient approximativement pour un nombre de Strouhal correspondant à $St = 0.07$ (voir la flèche sur la figure) alors que la valeur expérimentale déterminée par Eaton, 1980 est de $St = 0.066$.

6.3.4 Mémoire et temps de calcul requis

Au tableau 6.7, nous avons recueilli les données concernant la mémoire et le temps de calcul (CPU) qu'ont nécessités les simulations des grandes échelles avec l'ADC et l'ADM pour le Maillage 6. Ces simulations ont nécessité respectivement 290 et 340 heures de calculs avec l'ADC et l'ADM. Ces temps de calcul nous ont permis de simuler le comportement de l'écoulement pour une durée de moyennage correspondant à 10 temps de résidence. L'efficacité globale atteinte avec le calculateur NEC-SX5 se situe à 1.9 Gflops.

Tableau 6.7 Mémoire, temps de calcul et efficacité de calcul pour les simulations LES effectuées avec l'ADC et l'ADM. Cas où $Re_H = 39000$.

Maillage et approche dynamique	Mémoire requisse	Temps de calcul	Efficacité globale
Maillage 6 – ADC	960 Mégaoctets	290 heures	1.9 Gflops
Maillage 6 – ADM	960 Mégaoctets	340 heures	1.9 Gflops

6.3.5 Comparaison avec le modèle $k - \epsilon$

Des calculs numériques bidimensionnels de l'écoulement derrière la marche d'Eaton, 1980 où $Re_H = 39000$ ont été effectués en utilisant une modélisation statistique de type $k - \epsilon$. Comme pour le cas où $Re_H = 11000$, ces calculs ont été effectués en utilisant une méthode d'éléments finis avec adaptation du maillage par une technique de projection locale. Les détails concernant la discrétisation des équations, l'implantation du modèle $k - \epsilon$ et la technique d'adaptation sont présentés dans le mémoire de Turgeon, 1997.

Nous comparons les résultats convergés en maillage obtenus par le modèle $k - \epsilon$ avec

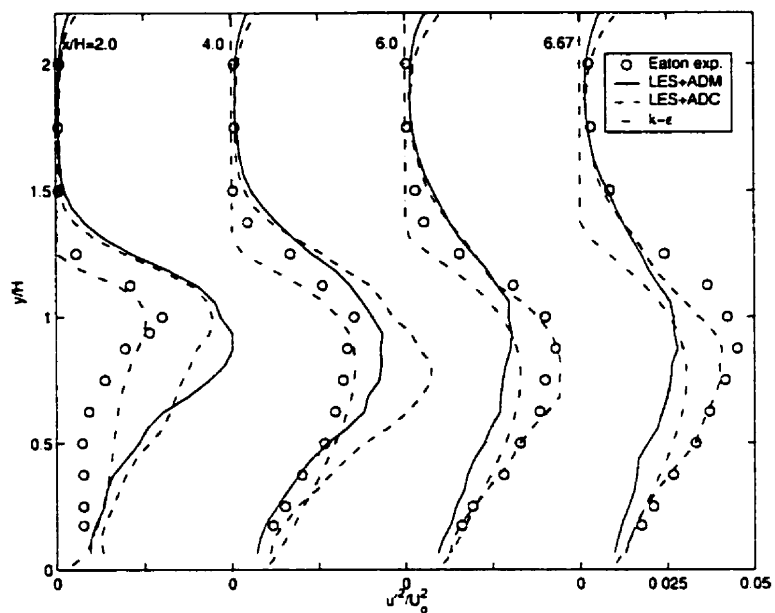
ceux des simulations LES correspondant au maillage le plus fin (Maillage 6)¹⁹. Le tableau 6.8 présente les longueurs moyennes de rattachement prédites par l'approche LES et le modèle $k - \epsilon$. Ce tableau révèle, comme nous l'avons montré précédemment, l'excellente aptitude de l'approche LES à capter adéquatement la longueur moyenne de rattachement avec une erreur de relative de 2.5% avec l'ADM alors qu'elle est de 17.5% lorsque nous utilisons le modèle $k - \epsilon$.

Tableau 6.8 Comparaison de la longueur moyenne de rattachement obtenue avec les simulations LES et la modélisation $k - \epsilon$ pour le cas où $Re_H = 39000$.

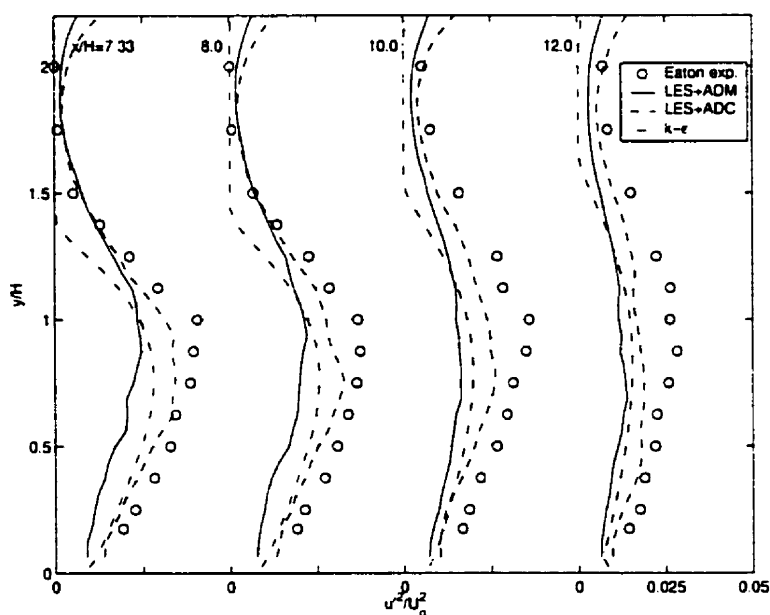
Cas Analysé	Longueur de rattachement	Erreur relative
Expérience d'Eaton, 1980	8.0	-
Simulation LES ADM + Maillage 6	7.8	2.5%
Simulation LES ADC + Maillage 6	7.5	6.3%
Modélisation $k - \epsilon$ maillage adaptatif	6.6	17.5%

Les figures 6.36 (a) et 6.36 (b) montrent la distribution de l'intensité de turbulence axiale $\langle u'^2 \rangle / U_o^2$ à différentes positions le long du plan longitudinal central de la marche. La comparaison des résultats LES avec ceux de la modélisation $k - \epsilon$ indique qu'aux positions longitudinales $x/H = 2$ et 4, le modèle $k - \epsilon$ représente bien l'intensité de turbulence axiale alors que les deux approches dynamiques surestiment cette quantité. On note cependant que le modèle $k - \epsilon$ et l'ADM sous-évaluent les niveaux de $\langle u'^2 \rangle / U_o^2$ aux positions $x/H \geq 6$ alors qu'à ces positions, l'ADC présente des résultats qui concordent mieux avec les valeurs expérimentales.

¹⁹Nous comparons les résultats obtenus avec l'ADC et l'ADM avec ceux du modèle $k - \epsilon$ car il n'a pas été possible comme pour le cas $Re_H = 11000$ de montrer laquelle des deux approches dynamiques engendrent les résultats les plus probants.



(a) Zone de recirculation: $x/H = 2.0, 4.0, 6.0$ et 6.67



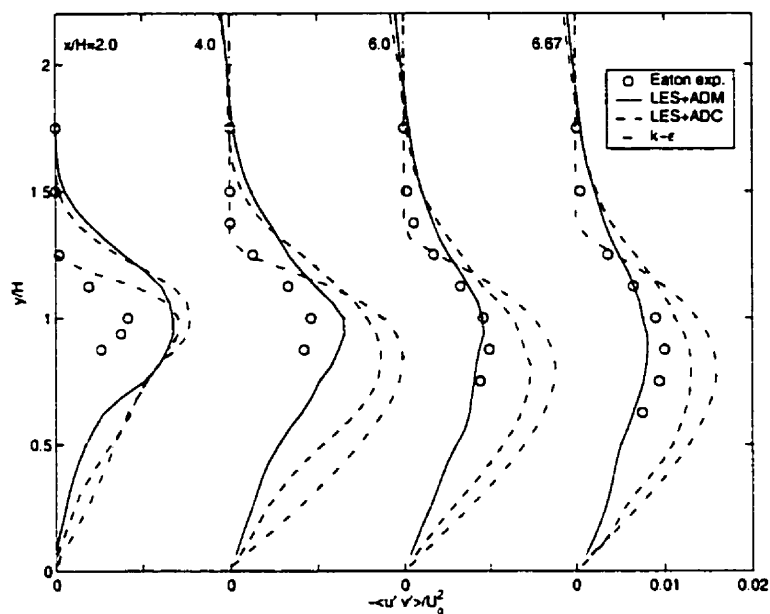
(b) Zone de recouvrement: $x/H = 7.33, 8.0, 10.0$ et 12.0

Figure 6.36 Distribution de l'intensité de turbulence axiale $\langle u'^2 \rangle / U_o^2$: comparaison des résultats de l'approche LES (Maillage 6) et de la modélisation $k-\epsilon$. Cas où $Re_H = 39000$.

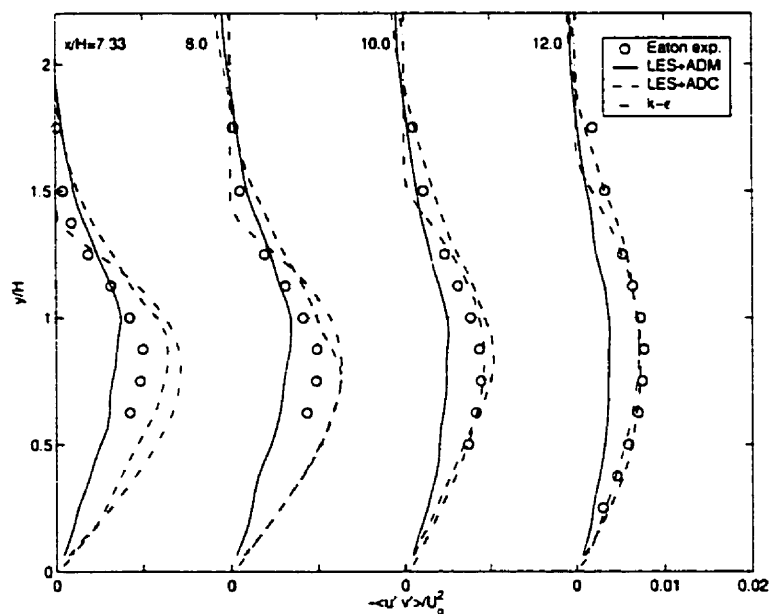
Les figures 6.37 (a) et 6.37 (b) illustrent les distributions du tenseur de Reynolds $-\langle u' v' \rangle / U_o^2$ obtenues avec la modélisation $k - \epsilon$ et ceux qui ont été obtenus avec les approches dynamiques. Ces figures révèlent une forte surévaluation du tenseur de Reynolds lors de l'utilisation du modèle $k - \epsilon$ et de l'ADC aux positions longitudinales se trouvant dans la zone de recirculation. Ces mêmes modèles prédisent cependant des valeurs très proches des mesures expérimentales aux positions $x/H = 10.0$ et $x/H = 12.0$.

La figure 6.38 montre l'énergie cinétique de turbulence k/U_o^2 obtenue avec l'approche LES et le modèle $k - \epsilon$. Cette figure révèle que la modélisation $k - \epsilon$ surestime l'énergie cinétique de turbulence notamment aux positions longitudinales $x/H = 4.0$ et $x/H = 6.0$. Ceci explique d'ailleurs le fait que la longueur moyenne de rattachement prédite par le modèle $k - \epsilon$ est relativement courte. En effet, plus l'énergie de turbulence est grande au niveau de la couche de cisaillement et de la zone de recirculation, plus le taux d'épanouissement de la couche de cisaillement est grand, ce qui engendre une longueur de rattachement plus courte. Ceci nous permet de comprendre également l'écart de la longueur moyenne de rattachement obtenu entre les deux approches dynamiques; l'ADC engendre en effet un niveau plus important d'énergie cinétique de turbulence que celle obtenue avec l'ADM d'où une plus petite valeur de la longueur de rattachement.

Cette analyse comparative entre l'approche LES et la modélisation $k - \epsilon$ démontre clairement que cette dernière présente des lacunes sérieuses pour la représentation de la zone de recirculation. Ceci est d'autant plus critique que le maillage utilisé dans le plan bidimensionnel avec le modèle $k - \epsilon$ comporte une discrétisation beaucoup plus fine que celui employé lors des simulations des grandes échelles.



(a) Zone de recirculation: $x/H = 2.0, 4.0, 6.0$ et 6.67



(b) Zone de recouvrement: $x/H = 7.33, 8.0, 10.0$ et 12.0

Figure 6.37 Distribution du tenseur de Reynolds $-\langle u' v' \rangle / U_0^2$: comparaison des résultats de l'approche LES (Maillage 6) et de la modélisation $k - \epsilon$. Cas où $Re_H = 39000$.

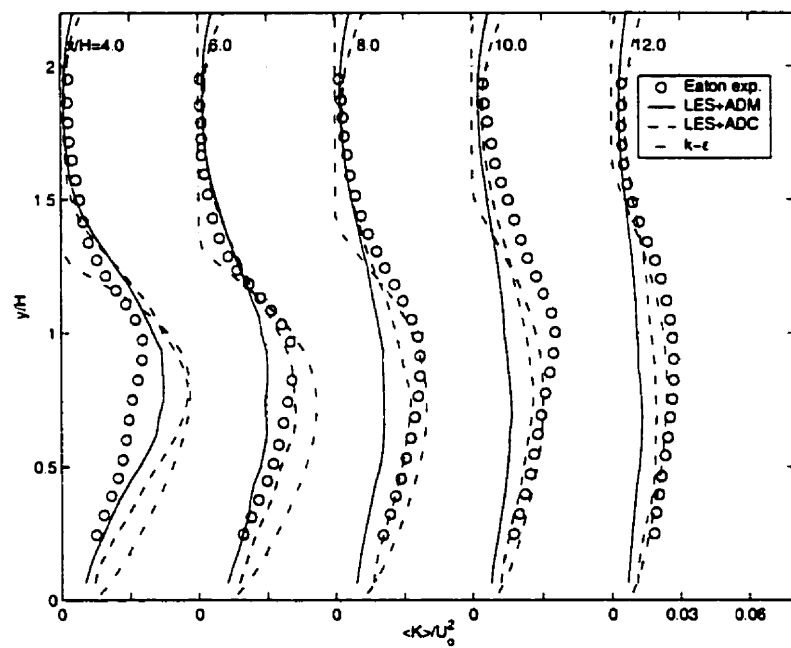


Figure 6.38 Distribution de l'énergie cinétique de turbulence k/U_0^2 : comparaison des résultats de l'approche LES (Maillage 6) et de la modélisation $k - \epsilon$. Cas où $Re_H = 39000$.

6.3.6 Champs instantanés de l'écoulement

Dans cette section, nous illustrons des exemples de champs instantanés permettant d'apprécier la manifestation de la turbulence se développant derrière la marche descendante. La figure 6.39 donne un aperçu du champ des vecteurs de la vitesse instantanée au niveau du plan longitudinal central ($z/H = 3.45$). Cette figure illustre la forte interaction tourbillonnaire existant entre la couche de cisaillement et la zone de recirculation. Quant à la figure 6.40, elle présente l'ensemble des tourbillons qui se développent dans le plan de l'envergure (plan yz) à une position longitudinale se situant dans la zone de recirculation soit $x/H = 5$. Les figures 6.39 et 6.40 montrent clairement que dans un écoulement turbulent, l'énergie tourbillonnaire se propage dans tout le domaine tridimensionnel.

La figure 6.41 illustre les variations spatiales du champ instantané de la composante de vitesse \bar{u} . Cette figure met en évidence les structures dynamiques dites à grandes échelles de l'écoulement apparaissant dans la couche de cisaillement et dans la zone de recirculation. Elle permet de concevoir l'interaction tourbillonnaire présente et d'imaginer l'évolution temporelle des structures captées par la simulation LES. Terminons cette section en présentant la figure 6.42 qui illustre les isostructures de la pression instantanée $\bar{p} = -0.3 \rho U_o^2$ qui se trouvent dans la couche de cisaillement à proximité de la marche descendante. Cette figure met de nouveau en évidence l'interaction des structures tridimensionnelles complexes caractérisant cet écoulement turbulent.

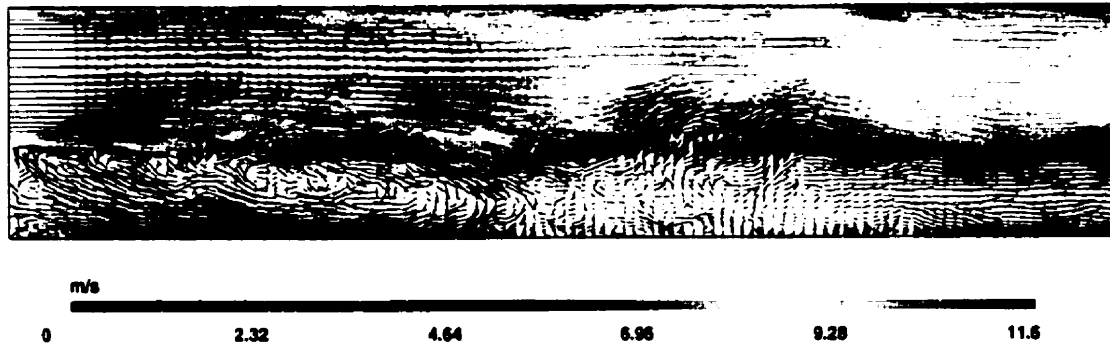


Figure 6.39 Champ des vecteurs de la vitesse instantanée dans le plan longitudinal central (plan xy à $z/H = 3.45$) au temps $t = 460H/U_o$. Cas où $Re_H = 39000$, utilisation de l'ADM avec le Maillage 6. Agrandissement de la zone de recirculation.

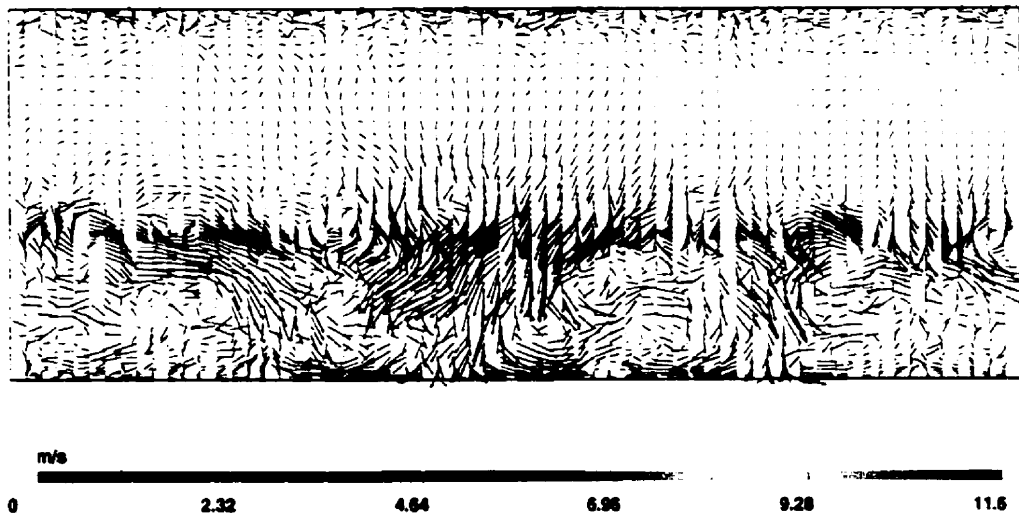


Figure 6.40 Champ des vecteurs de la vitesse instantanée dans le plan de l'envergure (plan yz) à $x/H = 5$ au temps $t = 460H/U_o$. Cas où $Re_H = 39000$, utilisation de l'ADM avec le Maillage 6.

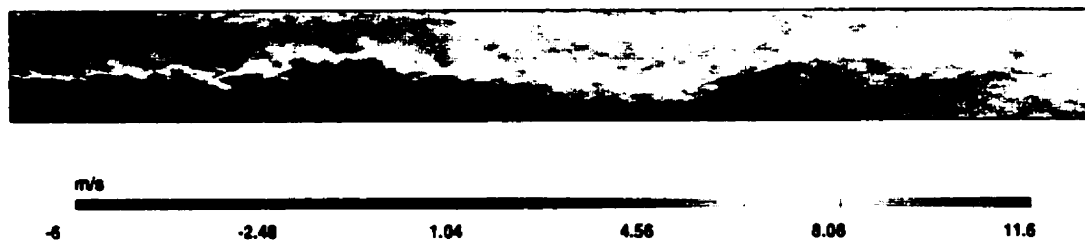


Figure 6.41 Champ instantané de la composante de vitesse \bar{u} dans le plan longitudinal central (plan xy à $z/H = 3.45$) au temps $t = 460H/U_o$. Cas où $Re_H = 39000$, utilisation de l'ADM avec le Maillage 6.



Figure 6.42 Isostructure de la pression instantanée $\bar{p} = -0.3 \rho U_o^2$ dans le plan xz (jusqu'à $x/H = 4$) au temps $t = 460H/U_o$. Cas où $Re_H = 39000$, utilisation de l'ADM avec le Maillage 6. Agrandissement de la vue de dessus du canal d'expansion de la marche.

CONCLUSION

L'objectif de cette étude numérique consistait à évaluer la faisabilité de la méthode de simulation des grandes échelles (LES) et à mesurer sa capacité à prédire adéquatement un écoulement turbulent de nature industrielle. Pour ce faire, nous avons effectué plusieurs simulations numériques, avec différents modèles de sous-maille, de la turbulence se développant derrière la marche descendante d'Eaton, 1980. Les résultats obtenus pour des nombres de Reynolds de 11000 et 39000 ont été confrontés aux mesures expérimentales et aux résultats issus du modèle $k - \epsilon$.

La comparaison des résultats obtenus avec les valeurs expérimentales a révélé clairement que les prédictions obtenues avec le modèle de Smagorinsky sont très sensibles au choix de la constante C_s et que ce modèle est de plus incapable de représenter adéquatement le comportement asymptotique de la viscosité de sous-maille près des parois solides. Quant au modèle de fonction de structure, il s'avère lui aussi déficient pour la représentation de l'écoulement au voisinage des parois solides puisque de mauvaises prédictions de la longueur moyenne de rattachement ont été également obtenues. L'utilisation des modèles de sous-maille de Smagorinsky et de fonction de structure n'est donc pas recommandée pour la simulation d'écoulements turbulents complexes. Les approches dynamiques classique et mixte (ADC et ADM) sont les modèles de sous-maille qui ont fourni les résultats numériques concordant le mieux avec les mesures expérimentales. Ces approches dynamiques présentent tout d'abord l'avantage de représenter fidèlement le comportement asymptotique de la viscosité de sous-maille dans le voisinage des parois solides de l'écoulement et permettent de plus de tenir compte du phénomène de réinjection de l'énergie des petites échelles vers les grandes.

L'analyse de l'écoulement turbulent avec $Re_H = 11000$ a montré l'excellente ca-

pacité de l'ADC et de l'ADM à prédire adéquatement la longueur moyenne de rattachement et la distribution de la vitesse moyenne axiale. Pour les deux approches dynamiques, les résultats concernant l'intensité de turbulence axiale concordent aussi globalement très bien avec les valeurs expérimentales. Une étude de raffinement de maillage a cependant indiqué qu'alors que l'utilisation de l'ADM engendre des niveaux d'intensité de turbulence axiale qui se rapprochent des valeurs expérimentales, les résultats obtenus avec l'ADC produisent l'effet contraire. Ce comportement anormal de l'ADC serait dû à sa tendance à modéliser une réinjection excessive d'énergie vers les grandes échelles provoquant ainsi une énergie de turbulence plus élevée. Nous avons de plus observé que l'ADM offre une plus grande stabilité numérique que l'ADC. Ces constatations permettent ainsi de recommander fortement l'utilisation de l'ADM comme modèle de sous-maille pour les simulations des grandes échelles pour des écoulements turbulents.

La même étude effectuée avec $Re_H = 39000$ a démontré que la méthode de simulation des grandes échelles s'avère également apte à représenter un écoulement à un nombre de Reynolds relativement élevé, sans recourir à une loi de paroi. En effet, les simulations effectuées ont donné de très bonnes prédictions de la longueur moyenne de rattachement et de la distribution de la vitesse moyenne axiale lors de l'utilisation de l'ADC et de l'ADM. Des différences appréciables ont cependant été observées entre les deux approches dynamiques pour l'intensité de turbulence axiale, le tenseur de Reynolds et l'énergie cinétique de turbulence. Les résultats prédits avec l'ADC concordent mieux avec ceux de l'expérience alors que les prédictions obtenues avec l'ADM sont sous-évaluées. Pour évaluer la validité des résultats obtenus, il y aurait lieu d'effectuer une étude de raffinement de maillage comme nous l'avons réalisé avec le cas $Re_H = 11000$. N'eût été du temps de calcul requis, celle-ci aurait permis de vérifier si le comportement inattendu observé avec l'ADC se produisait également avec $Re_H = 39000$ lors de l'observation de l'intensité de

turbulence axiale.

La faisabilité de la méthode LES a été évaluée en fonction de critères tels que la mémoire et le temps de calcul requis par les simulations en considérant les maillages les plus fins qui ont été étudiés. Le temps de calcul a été le paramètre le plus contraignant puisqu'approximativement 14 jours ont été nécessaires pour chacune des simulations effectuées avec $Re_H = 11000$ et $Re_H = 39000$ (ADC et ADM) dans cette étude numérique. En effet, la convergence statistique des résultats nécessite généralement une période de moyennage relativement longue correspondant à environ 12 à 15 temps de résidence. L'utilisation de la méthode LES pour la représentation d'écoulements turbulents complexes requiert l'accessibilité à un super-calculateur et des efforts appréciables de programmation pour vectoriser ou pour paralléliser le code de calcul.

Pour les deux nombres de Reynolds considérés dans cette étude, les analyses comparatives entre l'approche LES et la modélisation $k - \epsilon$ ont clairement indiqué la faiblesse de cette dernière à bien capter la zone de recirculation et conséquemment à prédire correctement la longueur moyenne de rattachement. Ce comportement du modèle $k - \epsilon$ est décevant en considération du fait que le maillage employé dans le plan bidimensionnel de la marche possède une discrétisation beaucoup plus fine que celle des simulations des grandes échelles qui pourtant, permettent d'obtenir une excellente prédiction de la longueur moyenne de rattachement. En somme, la modélisation $k - \epsilon$ possède une limite de précision intrinsèquement liée au modèle alors que l'approche LES comporte une contrainte quant à la finesse du maillage permettant un temps de calcul raisonnable étant donné son aspect tridimensionnel.

Par une programmation structurée du code de calcul, le programme DFMAC offre la possibilité d'ajouter d'autres aspects importants de la mécanique des fluides. Ainsi, plusieurs améliorations et extensions au code de calcul DFMAC sont recommandées:

- Incorporer la variante développée par Le et Moin, 1991, de la méthode numérique utilisée dans le code DFMAC et qui permet de réduire la contrainte sur le choix du pas de temps;
- Modifier le code de calcul pour traiter une géométrie d'écoulement dans un repère de coordonnées curvilignes orthogonales;
- Implanter l'équation de l'énergie pour résoudre des écoulements incompressibles comportant des effets thermiques;
- Modifier le code pour permettre l'étude d'écoulements turbulents faiblement compressibles;
- Implanter l'équation de transport du taux de mélange et celle de la fluctuation du taux de mélange pour permettre l'étude d'écoulements avec combustion.

La réalisation de cette analyse numérique a démontré l'aptitude de la méthode de simulation des grandes échelles à prédire adéquatement le comportement d'un écoulement turbulent se développant derrière une marche descendante. Ceci nous permet de conclure que cette méthode pourrait être appliquée avec succès à des problèmes de nature industrielle. Cette technique constitue certes une approche coûteuse en temps de calcul mais les progrès considérables accomplis dans le développement de la puissance des calculateurs scientifiques permettent cependant d'envisager d'ici une dizaine d'années l'utilisation courante de la simulation des grandes échelles pour des applications industrielles.

RÉFÉRENCES

- AKSELVOLL, K. et MOIN, P. (1996). Large-eddy simulation of turbulent confined coannular jets. *Journal of Fluids Mechanics*, 315, 387-411.
- ARMALY, B. F., DURST, F., PEREIRA, J. C. F. et SCHONUNG, B. (1983). Experimental and theoretical investigation of backward-facing step. *Journal of Fluids Mechanics*, 127, 473-496.
- AVANCHA, R. V. R. et PLETCHER, R. H. (2000). Large eddy simulation of turbulent flow past a backward facing step. *AIAA - 38th Aerospace Sciences Meeting & Exhibit*.
- AVVA, R. K. et SUNDARAM, S. (1998). Large eddy simulation of incompressible flows using a finite-volume approach. *AIAA - 36th Aerospace Sciences Meeting & Exhibit*.
- BAGGETT, J. S. (1997). Some modeling requirements for wall models in large eddy simulation. *Center for Turbulence Research Annual Research Briefs*, 123-134.
- BALARAS, E., BENOCCI, C. et PIOMELLI, U. (1996). Two-layer approximate boundary conditions for large-eddy simulation. *AIAA Journal*, 34.
- BARDINA, J., FERZIGER, J. H. et REYNOLDS, W. C. (1980). Improved subgrid scale for large eddy simulation. *AIAA paper No.80*.
- BARDINA, J., FERZIGER, J. H. et REYNOLDS, W. C. (1983). *Improved turbulence models based on large eddy simulation of homogeneous, incompressible, turbulent flows*. Thèse de doctorat, Stanford University. Department of mechanical engineering.

- BATCHELOR, G. K. (1953). *The theory of homogeneous turbulence*. Cambridge University Press.
- BRAMLEY, R. et WANG, X. (1997). SPLIB: A library of iterative methods for sparse linear systems. Rapport technique, University of Indiana, Bloomington.
- CABOT, W. (1995). Large-eddy simulations with wall models. *Center for Turbulence Research Annual Research Briefs*, 41-50.
- CABOT, W. (1996). Near-wall models in large eddy simulations of flow behind a backward-facing step. *Center for Turbulence Research Annual Research Briefs*, 199-210.
- CABOT, W. (1997). Wall models in large eddy simulation of separated flow. *Center for Turbulence Research Annual Research Briefs*, 97-106.
- CALMET, I. et MAGNAUDET, J. (1997). Large-eddy simulation of high-Schmidt number mass transfer in a turbulent channel flow. *Physics of Fluids*, 9, 438-455.
- CHOLLET, J. P. et LESIEUR, M. (1981). Parameterization of small scales of three-dimensional isotropic turbulence utilizing spectral closures. *J. Atmos. Sci.*, 38, 2747-2757.
- CLARK, R. A., FERZIGER, J. H. et REYNOLDS, W. C. (1979). Evaluation of subgrid-scale models using an accurately simulated turbulent flow. *Journal of Fluids Mechanics*, 91.
- COUSTEIX, J. (1989). *Turbulence et couche limite*. Cepadues-Editions.
- DAVID, E. (1993). *Modélisation des écoulements compressibles et hypersoniques: une approche instationnaire*. Thèse de doctorat. Institut de Grenoble.

DAVIDSON, L. (1997). Large eddy simulations: A note on derivation of the equations for the subgrid turbulent kinetic energies. Rapport technique, Thermo and Fluid Dynamics, Chalmers University of Technology Gothenburg, Sweden.

DEARDOFF, J. W. (1970). A numerical study of three-dimensionnal turbulent channel flow at large Reynolds numbers. *Journal of Fluids Mechanics*, 41 part 2.

DEMME, J. W., GILBERT, J. R. et LI, X. S. (1997). SuperLU User's Guide. Rapport technique, University of California, Berkeley.

DUCROS, F. (1995). *Simulations numériques directes et des grandes échelles de couches limites compressibles*. Thèse de doctorat, Natl. Polytech. Inst., Grenoble.

EATON, J. K. (1980). *Turbulent flow reattachment: an experimental study of the flow and structure behind a backward-facing step*. Thèse de doctorat, Stanford University.

ETHIER, C. R. et STEINMAN, D. A. (1994). Exact fully 3D Navier-Stokes solutions for benchmarking. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 19, 369–375.

FAVRE, A., KOVASZNY, L. S. G., DUMAS, R., GAVIGLIO, J. et COANTIC, M. (1976). *La turbulence en mécanique des fluides*. Gauthier-Villars.

FERZIGER, J. H. (1995). Direct and large eddy simulation of turbulence. Rapport technique, Department of mechanical engineering, Stanford University CA.

FERZIGER, J. H. et PERIC, M. (1996). *Computational methods for fluid dynamics*. Springer-Verlag.

FLETCHER, C. A. J. (1991). *Computational Techniques for Fluid Dynamics 2*. Springer-Verlag, Second Edition édition.

- FUREBY, C. (1998). Towards large eddy simulations of flows in complex geometries. *AIAA - 29th Fluid Dynamics Conference (Albuquerque, NM)*.
- GERMANO, M. (1986). A proposal for a redefinition of the turbulent stresses in the filtered Navier-Stokes equations. *Physics of Fluids*, 29, 2323–2324.
- GERMANO, M., PIOMELLI, U., MOIN, P. et CABOT, W. H. (1991). A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Physics of Fluids*, 3, 1760–1765.
- GHOSAL, S. (1995). Analysis of discretization errors in LES. *Center for Turbulence Research Annual Research Briefs*, 3–24.
- GHOSAL, S. (1998). Mathematical and Physical constraints on LES. *AIAA - 29th Fluid Dynamics Conference (Albuquerque, NM)*.
- GHOSAL, S., LUND, T. S., MOIN, P. et AKSELVOLL, K. (1995). A dynamic localization model for large-eddy simulation of turbulent flows. *Journal of Fluids Mechanics*, 286, 229–255.
- GHOSAL, S. et MOIN, P. (1995). The basic equations for the large eddy simulation of turbulent flows in complex geometry. *Journal of Computational Physics*, 118, 24–37.
- GLEICK, J. (1991). *La théorie du chaos*. Flammarion.
- GONZE, M. A. (1994). Revue, amélioration et validation de modélisations de sous-maille. Application à la simulation numérique des écoulements turbulents. Rapport technique, R95-2, CERCA.
- GRESHO, P. M. et SANI, R. (1987). On pressure boundary conditions for the incompressible Navier-Stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 7, 1111–1145.

HARLOW, F. H. et NAKAYAMA, P. (1967). Turbulent Transport Equations. *The Physic of Fluids*, 11, 2323.

HARLOW, F. H. et WELCH, J. E. (1965). Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface. *The Physic of Fluids*, 8, 2182-2189.

HOFFMAN, J. D. (1992). *Numerical methods for engineers and scientists*. McGraw Hill.

HOFFMANN, K. A. et CHIANG, S. T. (1993). *Computational fluid dynamics for engineers*. Engineering Education System.

KIM, J. et MOIN, P. (1985). Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 59, 308-323.

KRAVCHENKO, A. G. et MOIN, P. (1997). On the effect of numerical errors in large eddy simulations of turbulent flows. *Journal of Computational Physics*, 131, 310-322.

LARDAT, R. (1997). *Simulations numériques d'écoulements externes instationnaires décollés autour d'une aile avec des modèles de sous maille*. Thèse de doctorat, Université de Paris 6.

LAUNDER, B. E. et SPALDING, D. B. (1972). *Mathematical models of turbulence*. Academic Press, London.

LE, H. et MOIN, P. (1991). An improvement of fractional step methods for the incompressible Navier-Stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 92, 369-379.

LE, H., MOIN, P. et KIM, J. (1997). Direct numerical simulation of turbulent flow over a backward-facing step. *Journal of Fluids Mechanics*, 330, 349-374.

- LEONARD, A. (1974). Energy cascade in large-eddy simulations of turbulent fluid flows. *Advances in geophysics*, 18A.
- LESIEUR, M. (1990). *Turbulence in Fluids*. Kluwer Academic Publishers, Second revised édition.
- LESIEUR, M. (1994). *La Turbulence*. Collection Grenoble Sciences. Presses Universitaires de Grenoble.
- LESIEUR, M. et MÉTAIS, O. (1996). New trends in large eddy simulations of turbulence. *Annual reviews of fluid mechanics*, 28, 45-82.
- LILLY, D. K. (1967). The representation of small-scale turbulence in numerical simulation experiments. *In Proc. IBM Sci. Comp. Symp. on environmental sciences, Yorktown Heights, NY*, 195-210.
- LILLY, D. K. (1992). A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method. *Physics of Fluids*, 4, 633-635.
- LUND, T. S., WU, X. et SQUIRES, K. D. (1996). On the generation of turbulent inflow conditions for boundary layer simulations. *Center for Turbulence Research Annual Research Briefs*, 281-295.
- MASON, P. J. et CALLEN, N. S. (1986). On the magnitude of the subgrid-scale eddy coefficient in large-eddy simulations of turbulent channel flow. *Journal of Fluids Mechanics*, 162.
- MOIN, P. et KIM, J. (1982). Numerical investigation of turbulent channel flow. *Journal of Fluids Mechanics*, 118, 341-377.
- MÉTAIS, O. et LESIEUR, M. (1992). Spectral large-eddy simulation of isotropic and stably stratified turbulence. *Journal of Fluids Mechanics*, 239, 157-194.

NETO, A. S., GRAND, D., MÉTAIS, O. et LESIEUR, M. (1993). A numerical investigation of the coherent vortices in turbulence behind a backward-facing step. *Journal of Fluids Mechanics*, 256, 1-25.

OEFELIN, J. C. (1997). *Simulation and analysis of turbulent multiphase combustion processes at high pressures*. Thèse de doctorat, The Pennsylvania State University.

PEYRET, R. et TAYLOR, T. D. (1983). *Computational Methods for Fluid Flow*. Springer-Verlag.

PIOMELLI, U. (1994). Large-eddy simulation of turbulent flows. Rapport technique, TAM Report No.767. UILU-ENG-94-6023.

PIOMELLI, U. (1998). Large-eddy simulations: present state and future directions. *AIAA - 36th Aerospace Sciences Meeting & Exhibit*.

PIOMELLI, U., COLEMAN, G. et KIM, J. (1997). On the effects of non-equilibrium on the subgrid-scale stresses. *Physics of Fluids*, 9, 2740-2748.

PIOMELLI, U., FERZIGER, J., MOIN, P. et KIM, J. (1989). New approximate boundary conditions for large eddy simulations of wall-bounded flows. *Physics of Fluids*, 1, 1061-1068.

PIOMELLI, U., ZHANG, T. A., SPEZIALE, C. G. et HUSSAINI, M. Y. (1990). On the large eddy simulation of transitional wall-bounded flows. *Physics of Fluids*, 2, 257-265.

PÉNEAU, F. (1999). *Étude numérique par simulation des grandes échelles de l'influence d'une forte turbulence extérieure sur les transferts pariétaux au sein d'une couche limite*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse.

REYNOLDS, O. (1895). On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*.

REYNOLDS, W. C. (1976). Computation of turbulent flows. *Annual review of fluid mechanics*, 8.

ROACHE, P. J. (1995). Verification of codes and calculations. *AIAA - 26th Fluid Dynamics Conference (San Diego, CA)*.

ROACHE, P. J. (1998). *Verification and validation in computational science and engineering*. Hermosa publishers.

ROBINSON, S. K. (1991). Coherent motions in the turbulent boundary layer. *Annual reviews of fluid mechanics*, 23, 601-639.

ROGALLO, R. S. et MOIN, P. (1984). Numerical simulation of turbulent flows. *Annual review of fluid mechanics*, 16, 99-137.

SAGAUT, P. et GROHENS, R. (1999). Discrete filters for large eddy simulation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 31, 1195-1220.

SCHIESTEL, R. (1993). *Modélisation et simulation numérique des écoulements turbulents*. série mécanique. Traité des nouvelles technologies, Hermès édition.

SCHUMANN, U. (1975). Subgrid scale model for finite difference simulations of turbulent flows in plane channels and annuli. *Journal of Computational Physics*, 18, 376-404.

SMAGORINSKY, J. (1963). General circulation experiments with the primitive equations. Part I. The basic experiment. *Monthly weather review*, 91.

TENNEKES, H. et LUMLEY, J. L. (1972). *A first course in turbulence*. MIT Press.

TURGEON, E. (1997). *Application d'une méthode d'éléments finis adaptative à des écoulements axisymétriques*. Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal.

VAN DRIEST, E. R. (1956). On turbulent flow near a wall. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 23.

WEILL, D. (1997). *Étude des instabilités de cisaillement dans une couche de mélange compressible anélastique et stratifiée. Simulation numérique directe et modèles de sous-maille*. Mémoire de maîtrise, Département de physique. Université de Montréal.

WILCOX, D. C. (1993). *Turbulence modeling for CFD*. DCW Industries.

ZANG, Y. *et al.* (1993). A dynamic mixed subgrid-scale model and its application to turbulent recirculating flows. *Physics of Fluids*, 5, 3186–3196.

ANNEXE I

FILTRAGE NON UNIFORME UNIDIMENSIONNEL

I.1 Non-commutativité des opérateurs de filtrage et de dérivation

On veut démontrer que la propriété de commutativité ne s'applique plus lors de l'application d'un filtre possédant une taille variable spatialement en effectuant le développement pour le cas à une dimension. On débute le raisonnement en précisant que la largeur du filtre est une fonction de la variable spatiale ξ , c'est-à-dire que $\Delta_+(\xi)$ et que $\Delta_-(\xi)$. On définit le filtrage de la variable ϕ de la manière suivante:

$$\overline{\phi}(\xi) = \frac{1}{(\Delta_+ + \Delta_-)} \int_{\xi - \Delta_-}^{\xi + \Delta_+} \phi(\eta) d\eta \quad (I.1)$$

On applique l'opérateur d'un filtre sur la dérivée de ϕ par rapport à ξ :

$$\overline{\frac{d\phi}{d\xi}} = \frac{1}{(\Delta_+ + \Delta_-)} \int_{\xi - \Delta_-}^{\xi + \Delta_+} \frac{d\phi(\eta)}{d\xi} d\eta \quad (I.2)$$

On effectue la différence entre la dernière relation (I.2) et la dérivée de l'expression (I.1):

$$\overline{\frac{d\phi}{d\xi}} - \frac{d\overline{\phi}}{d\xi} = \underbrace{\frac{1}{(\Delta_+ + \Delta_-)} \int_{\xi - \Delta_-}^{\xi + \Delta_+} \frac{d\phi}{d\xi} d\eta}_{\text{terme A}} - \underbrace{\frac{d}{d\xi} \left[\frac{1}{(\Delta_+ + \Delta_-)} \int_{\xi - \Delta_-}^{\xi + \Delta_+} \phi(\eta) d\eta \right]}_{\text{terme B}} \quad (I.3)$$

Le *terme A* peut facilement se réduire à:

$$\text{terme } A = \frac{1}{(\Delta_+ + \Delta_-)} [\phi(\xi + \Delta_+) - \phi(\xi - \Delta_-)] \quad (\text{I.4})$$

Quant au *terme B*, il nécessite plus de manipulations où il faut garder à l'esprit que la largeur du filtre est une fonction de la variable spatiale ξ :

$$\text{terme } B = \frac{d}{d\xi} \left[\frac{1}{(\Delta_+ + \Delta_-)} \right] \int_{\xi - \Delta_-}^{\xi + \Delta_+} \phi d\eta + \underbrace{\frac{1}{(\Delta_+ + \Delta_-)} \frac{d}{d\xi} \left[\int_{\xi - \Delta_-}^{\xi + \Delta_+} \phi d\eta \right]}_{\text{terme } C} \quad (\text{I.5})$$

À partir de là, il faut développer le *terme C*. Pour ce faire, on commence par poser que $\psi = \int \phi d\eta$ et que les bornes d'intégration sont maintenant liées à la variable z , c'est-à-dire que $z^+ = \xi + \Delta_+$ et $z^- = \xi - \Delta_-$. On peut maintenant réécrire le *terme C* de la relation (I.5) comme étant:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} [\psi(z^+) - \psi(z^-)] &= \frac{d\psi(z^+)}{d\xi} - \frac{d\psi(z^-)}{d\xi} \\ &= \frac{d\psi(z^+)}{dz^+} * \frac{dz^+}{d\xi} - \frac{d\psi(z^-)}{dz^-} * \frac{dz^-}{d\xi} \\ &= \phi(z^+) * \left(1 + \frac{d\Delta_+}{d\xi} \right) - \phi(z^-) * \left(1 - \frac{d\Delta_-}{d\xi} \right) \quad (\text{I.6}) \end{aligned}$$

Grâce à la relation précédente, on peut maintenant exprimer le *terme C* uniquement en fonction de la variable ξ :

$$\text{terme } C = \phi(\xi + \Delta_+) - \phi(\xi - \Delta_-) + \phi(\xi + \Delta_+) \frac{d\Delta_+}{d\xi} + \phi(\xi - \Delta_-) \frac{d\Delta_-}{d\xi} \quad (\text{I.7})$$

Le développement du *terme B* à l'expression (I.5) se poursuit donc ainsi:

$$\begin{aligned} \text{terme } B &= \frac{-1}{(\Delta_+ + \Delta_-)^2} \left[\frac{d\Delta_+}{d\xi} + \frac{d\Delta_-}{d\xi} \right] \int_{\xi-\Delta_-}^{\xi+\Delta_+} \phi d\eta + \\ &\frac{\phi(\xi + \Delta_+) - \phi(\xi - \Delta_-)}{(\Delta_+ + \Delta_-)} + \frac{1}{(\Delta_+ + \Delta_-)} \left[\phi(\xi + \Delta_+) \frac{d\Delta_+}{d\xi} + \phi(\xi - \Delta_-) \frac{d\Delta_-}{d\xi} \right] \quad (I.8) \end{aligned}$$

Finalement, on peut écrire l'expression $(\overline{d\phi/d\xi} - d\bar{\phi}/d\xi)$ en nous servant de la relation (I.3) et de la définition d'un filtre (I.1):

$$\begin{aligned} \frac{\overline{d\phi}}{d\xi} - \frac{d\bar{\phi}}{d\xi} &= \frac{1}{(\Delta_+ + \Delta_-)} \left[\frac{d\Delta_+}{d\xi} + \frac{d\Delta_-}{d\xi} \right] \bar{\phi} \\ &- \frac{1}{(\Delta_+ + \Delta_-)} \left[\phi(\xi + \Delta_+) \frac{d\Delta_+}{d\xi} + \phi(\xi - \Delta_-) \frac{d\Delta_-}{d\xi} \right] \quad (I.9) \end{aligned}$$

On vient donc de démontrer la non-commutativité des opérateurs de filtrage de dérivation lors de l'application d'un filtre avec une taille variable dans l'espace.

ANNEXE II

QUANTITÉS FILTRÉES AVEC LE MODÈLE DYNAMIQUE

II.1 Filtre arithmétique

Dans cette section, nous introduisons la notion de filtre arithmétique permettant d'obtenir des quantités filtrées telles que $\bar{\bar{\phi}}_i$ et $\bar{\phi}_i$. Cette notion est décrite en détails dans la thèse de Lardat, 1997 et dans l'article de Sagaut et Grohens, 1999. Pour déterminer les quantités doublement filtrées comme $\bar{\bar{\phi}}_i$, on définit un filtre arithmétique basé sur une discrétisation à trois points. Lorsque l'on utilise la méthode des différences finies, on peut donc écrire le filtre unidimensionnel suivant:

$$\bar{\bar{\phi}}_i = \frac{1}{2+c} (\bar{\phi}_{i-1} + c\bar{\phi}_i + \bar{\phi}_{i+1}) \quad (\text{II.1})$$

Dans ce qui suit, nous montrerons que selon la valeur du poids central c , nous optons soit pour un filtre-test ou soit pour un double filtre du maillage. En effet, le poids central $c = 2$ est souvent considéré comme l'application du filtre-test de largeur $\bar{\bar{\Delta}} = 2\bar{\Delta}$ où $\bar{\Delta}$ représente la discrétisation du maillage. Pour démontrer cette affirmation, imaginons que l'on désire connaître la valeur moyenne de la fonction ϕ de la figure II.1 dans l'intervalle $[i-1, i+1]$. Cette intervalle représente une largeur deux fois plus grande que celle du pas de discrétisation et correspond à la taille du filtre.

Ainsi, pour calculer la moyenne de la fonction ϕ , on applique la méthode des

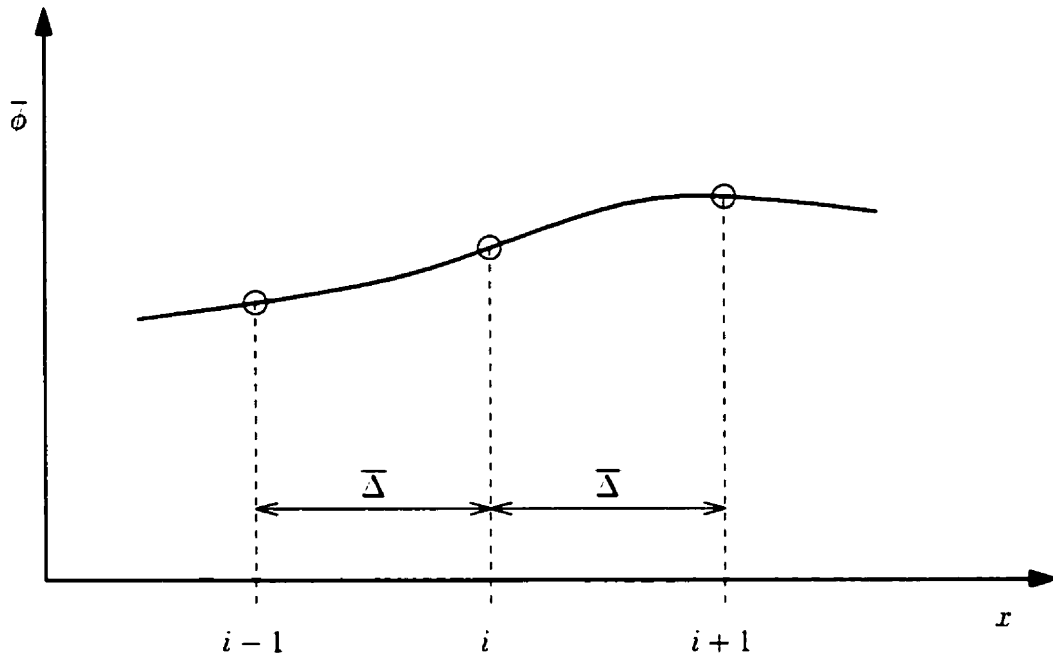


Figure II.1 Filtrage de la fonction $\bar{\phi}$ avec un filtre-test de largeur $\tilde{\Delta} = 2\bar{\Delta}$.

trapèzes composés:

$$\begin{aligned}\tilde{\bar{\phi}}_i &= \frac{1}{2\bar{\Delta}} * \frac{\bar{\Delta}}{2} (\bar{\phi}_{i-1} + 2\bar{\phi}_i + \bar{\phi}_{i+1}) \\ \tilde{\bar{\phi}}_i &= \frac{1}{4} (\bar{\phi}_{i-1} + 2\bar{\phi}_i + \bar{\phi}_{i+1})\end{aligned}\quad (\text{II.2})$$

Cette dernière expression correspond à utiliser le filtre arithmétique (II.1) en spécifiant $c = 2$. Autrement dit, l'application du filtre-test de largeur $\tilde{\Delta}$ à la fonction $\bar{\phi}_i$ revient à calculer la moyenne de cette fonction sur l'intervalle correspondant à la largeur du filtre-test pour engendrer le champ $\tilde{\bar{\phi}}_i$.

De la même façon, le choix $c = 6$ correspond au filtre de largeur $\tilde{\Delta} = \bar{\Delta}$. Il suffit de calculer la moyenne de la fonction ϕ de la figure II.2 dans l'intervalle $[i-1/2, i+1/2]$. Cet intervalle représente une largeur égale à celle du pas de discrétisation. On

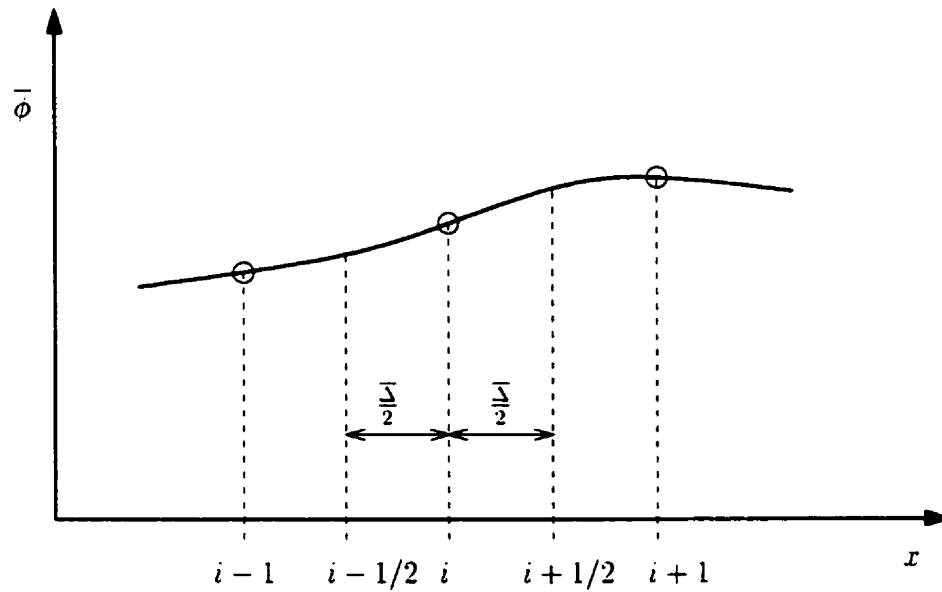


Figure II.2 Filtrage de la fonction $\bar{\phi}$ avec un filtre de largeur $\bar{\Delta} = \underline{\Delta}$.

calcul de nouveau la moyenne de la fonction ϕ en appliquant la méthode des trapèze composés:

$$\bar{\bar{\phi}}_i = 1/\bar{\Delta} * \frac{\bar{\Delta}/2}{2} (\bar{\phi}_{i-1/2} + 2\bar{\phi}_i + \bar{\phi}_{i+1/2}) \quad (\text{II.3})$$

Les valeurs intermédiaires $\bar{\phi}_{i-1/2}$ et $\bar{\phi}_{i+1/2}$ de la relation (II.3) peuvent être exprimées en fonction des valeurs explicites obtenues sur les points du maillage:

$$\bar{\phi}_{i-1/2} = 1/2(\bar{\phi}_{i-1} + \bar{\phi}_i) \quad (\text{II.4})$$

$$\bar{\phi}_{i+1/2} = 1/2(\bar{\phi}_{i+1} + \bar{\phi}_i) \quad (\text{II.5})$$

Maintenant, en substituant les expressions (II.4) et (II.5) dans la relation (II.3).

on peut écrire que

$$\bar{\bar{\phi}}_i = \frac{1}{8} (\bar{\phi}_{i-1} + 6\bar{\phi}_i + \bar{\phi}_{i+1}) \quad (\text{II.6})$$

Cette dernière équation représente l'utilisation du filtre arithmétique (II.1) avec $c = 6$ et correspond à une opération de filtrage sur la fonction $\bar{\phi}_i$ avec une largeur de filtre $\bar{\Delta}$ qui résulte en un champ doublement filtré $\bar{\bar{\phi}}_i$.

On vient de présenter l'utilisation des filtres arithmétiques. L'application d'un filtre à une certaine fonction $\bar{\phi}_i$ se résume à effectuer une opération de moyennage sur un domaine correspondant à la largeur du filtre. L'application d'un filtre arithmétique en trois dimensions peut être réalisée en utilisant une séquence de trois filtres unidimensionnels. Sous une forme générale, on écrit donc cette séquence comme étant:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{i,j,k}^* &= \frac{1}{2+c} (\bar{\phi}_{i-1,j,k} + c\bar{\phi}_{i,j,k} + \bar{\phi}_{i+1,j,k}) \\ \bar{\phi}_{i,j,k}^{**} &= \frac{1}{2+c} (\bar{\phi}_{i,j-1,k}^* + c\bar{\phi}_{i,j,k}^* + \bar{\phi}_{i,j+1,k}^*) \\ \tilde{\phi}_{i,j,k} &= \frac{1}{2+c} (\bar{\phi}_{i,j,k-1}^{**} + c\bar{\phi}_{i,j,k}^{**} + \bar{\phi}_{i,j,k+1}^{**}) \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

Le choix $c = 2$ correspond à utiliser un filtre de largeur $\tilde{\Delta} = 2\bar{\Delta}$ alors que le choix $c = 6$ est associé à un filtre de largeur $\tilde{\Delta} = \bar{\Delta}$.

II.2 Volumes de filtrage pour une cellule interne

Tel que décrit au chapitre 4, le code numérique utilise la notion de discrétisation décalée pour les différentes composantes de vitesse (voir la figure 4.1). Dans le but de faciliter l'ensemble des opérations de filtrage lors de la modélisation de sous-maille avec l'approche dynamique, on positionne toutes les quantités à filtrer au centre des cellules du maillage. La formulation de l'approche dynamique fait intervenir le filtre double et le filtre-test. Ces filtres sont associés à des volumes donnés dans l'espace et sont représentés aux figures II.3 et II.4 pour le cas où l'on désire déterminer une quantité filtrée au centre d'une cellule interne.

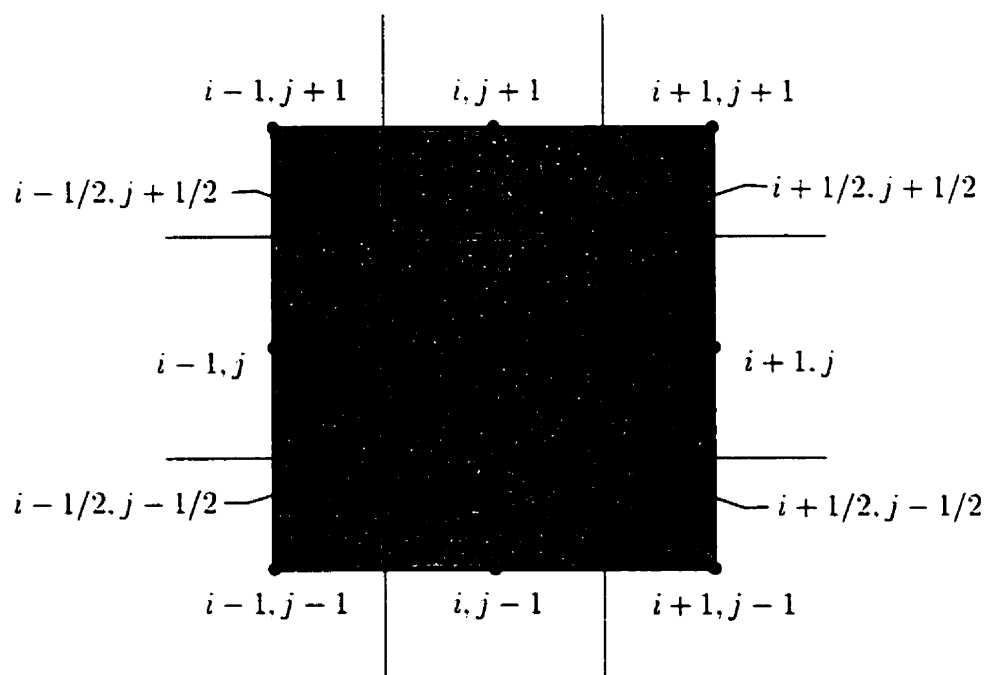


Figure II.3 Volume correspondant au filtre-test. Cas pour une cellule interne.

Pour une question de clarté, ces figures illustrent uniquement la situation bidimensionnelle des volumes de filtrage et le cas où le maillage est uniforme. Le lecteur doit s'imaginer ces volumes dans le contexte tridimensionnel d'une simulation des

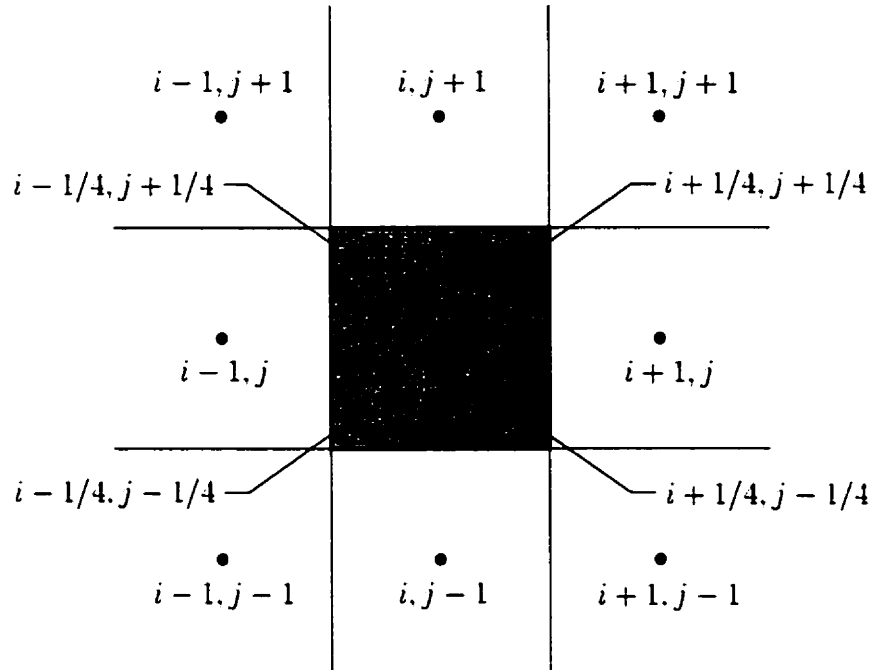


Figure II.4 Volume correspondant au filtre du maillage. Cas pour une cellule interne.

grandes échelles en considérant les trois plans de discrétisation: $k-1$, k et $k+1$. Il est également important de souligner que les variables à filtrer lors de l'utilisation de l'approche dynamique sont celles provenant de la résolution des grandes échelles et désignées par $\bar{\phi}$. Maintenant, supposons que l'on veuille déterminer la quantité filtrée $\tilde{\phi}_{i,j,k}$; il suffit d'évaluer la moyenne de $\bar{\phi}_{i,j,k}$ sur le volume du filtre-test tel qu'illustré à la figure II.3. Pour ce faire, on utilise la méthode du trapèze et on écrit que

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{i,j,k} = \frac{1}{8} [& \bar{\phi}_{i-1/2,j-1/2,k-1/2} + \bar{\phi}_{i+1/2,j-1/2,k-1/2} + \\ & \bar{\phi}_{i+1/2,j+1/2,k-1/2} + \bar{\phi}_{i-1/2,j+1/2,k-1/2} + \\ & \bar{\phi}_{i-1/2,j-1/2,k+1/2} + \bar{\phi}_{i+1/2,j-1/2,k+1/2} + \\ & \bar{\phi}_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} + \bar{\phi}_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}] \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

Par la suite, on exprime toutes ces variables intermédiaires en fonction de celles résolues par le maillage. Par exemple, $\bar{\phi}_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}$ est calculée par interpolation linéaire comme suit:

$$\bar{\phi}_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} = \frac{1}{8} \left[\bar{\phi}_{i,j,k} + \bar{\phi}_{i+1,j,k} + \bar{\phi}_{i+1,j+1,k} + \bar{\phi}_{i,j+1,k} + \bar{\phi}_{i,j,k+1} + \bar{\phi}_{i+1,j,k+1} + \bar{\phi}_{i+1,j+1,k+1} + \bar{\phi}_{i,j+1,k+1} \right] \quad (\text{II.9})$$

En procédant de la sorte, on réussit à déterminer la séquence de formules similaire à celle de l'expression générale (II.7) en considérant le cas où l'on emploie le filtre-test ($c = 2$):

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{i,j,k}^* &= \frac{1}{4} (\bar{\phi}_{i-1,j,k} + 2\bar{\phi}_{i,j,k} + \bar{\phi}_{i+1,j,k}) \\ \bar{\phi}_{i,j,k}^{**} &= \frac{1}{4} (\bar{\phi}_{i,j-1,k}^* + 2\bar{\phi}_{i,j,k}^* + \bar{\phi}_{i,j+1,k}^*) \\ \bar{\phi}_{i,j,k}^{\approx} &= \frac{1}{4} (\bar{\phi}_{i,j,k-1}^{**} + 2\bar{\phi}_{i,j,k}^{**} + \bar{\phi}_{i,j,k+1}^{**}) \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

Cette séquence de formules permettant de déterminer $\bar{\phi}_{i,j,k}^{\approx}$ possède l'avantage d'être compacte et d'optimiser le nombre d'opérations numériques à effectuer. Cette formulation est celle qui a été employée par Zang *et al.*, 1993.

De la même manière que pour le filtre-test, il est possible de calculer la quantité filtrée $\bar{\bar{\phi}}_{i,j,k}$ obtenue en appliquant le filtre du maillage à $\bar{\phi}_{i,j,k}$. Tel qu'illustré à la figure II.4, on effectue la moyenne de $\bar{\phi}_{i,j,k}$ sur le volume correspond à celui d'une cellule et on écrit ainsi la relation suivante:

$$\bar{\bar{\phi}}_{i,j,k} = \frac{1}{8} [\bar{\phi}_{i-1/4,j-1/4,k-1/4} + \bar{\phi}_{i+1/4,j-1/4,k-1/4} +$$

$$\begin{aligned}
& \bar{\phi}_{i+1/4,j+1/4,k-1/4} + \bar{\phi}_{i-1/4,j+1/4,k-1/4} + \\
& \bar{\phi}_{i-1/4,j-1/4,k+1/4} + \bar{\phi}_{i+1/4,j-1/4,k+1/4} + \\
& \bar{\phi}_{i+1/4,j+1/4,k+1/4} + \bar{\phi}_{i-1/4,j+1/4,k+1/4}] \quad (II.11)
\end{aligned}$$

Comme pour le cas précédent, il faut exprimer toutes les variables intermédiaires en fonction de celles obtenues directement par le code de calcul. À titre d'exemple, on exprime $\bar{\phi}_{i+1/4,j+1/4,k+1/4}$ de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
\bar{\phi}_{i+1/4,j+1/4,k+1/4} = \frac{1}{64} [27\bar{\phi}_{i,j,k} + 9(\bar{\phi}_{i+1,j,k} + \bar{\phi}_{i,j+1,k} + \bar{\phi}_{i,j,k+1}) + \\
3(\bar{\phi}_{i+1,j+1,k} + \bar{\phi}_{i+1,j,k+1} + \bar{\phi}_{i,j+1,k+1}) + \bar{\phi}_{i+1,j+1,k+1}] \quad (II.12)
\end{aligned}$$

De cette manière, il est possible de faire ressortir la séquence de formules pour le cas où l'on effectue une opération de filtrage avec le filtre du maillage:

$$\begin{aligned}
\bar{\phi}_{i,j,k}^* &= \frac{1}{8} (\bar{\phi}_{i-1,j,k} + 6\bar{\phi}_{i,j,k} + \bar{\phi}_{i+1,j,k}) \\
\bar{\phi}_{i,j,k}^{**} &= \frac{1}{8} (\bar{\phi}_{i,j-1,k}^* + 6\bar{\phi}_{i,j,k}^* + \bar{\phi}_{i,j+1,k}^*) \\
\bar{\phi}_{i,j,k}^{\bar{\bar{}}} &= \frac{1}{8} (\bar{\phi}_{i,j,k-1}^{**} + 6\bar{\phi}_{i,j,k}^{**} + \bar{\phi}_{i,j,k+1}^{**}) \quad (II.13)
\end{aligned}$$

II.3 Volumes de filtrage pour une cellule en contact avec une frontière externe

À la section précédente, nous avons présenté les relations (II.10) et (II.13) permettant de filtrer une variable soit par le filtre-test ou soit par le filtre double pour le cas d'une cellule de calcul interne. Cependant, ces relations ne sont plus valides

pour une cellule de calcul en contact avec une frontière externe du domaine. Les figures II.5 et II.6 illustrent cette situation où la frontière externe est située du côté gauche. Le filtrage de la variable $\bar{\phi}_{i,j,k}$ par le filtre-test est effectué en employant la relation (II.8) où l'interpolation des quantités intermédiaires localisées sur la frontière externe diffère par rapport au cas de la section précédente. On interpole plutôt ces points sur la frontière externe de la façon suivante:

$$\bar{\phi}_{i-1/2,j+1/2,k+1/2} = \frac{1}{4} [\bar{\phi}_{i-1,j+1,k} + \bar{\phi}_{i-1,j,k} + \bar{\phi}_{i-1,j+1,k+1} + \bar{\phi}_{i-1,j,k+1}] \quad (\text{II.14})$$

$$\bar{\phi}_{i-1/2,j-1/2,k+1/2} = \frac{1}{4} [\bar{\phi}_{i-1,j-1,k} + \bar{\phi}_{i-1,j,k} + \bar{\phi}_{i-1,j-1,k+1} + \bar{\phi}_{i-1,j,k+1}] \quad (\text{II.15})$$

$$\bar{\phi}_{i-1/2,j+1/2,k-1/2} = \frac{1}{4} [\bar{\phi}_{i-1,j+1,k} + \bar{\phi}_{i-1,j,k} + \bar{\phi}_{i-1,j+1,k-1} + \bar{\phi}_{i-1,j,k-1}] \quad (\text{II.16})$$

$$\bar{\phi}_{i-1/2,j-1/2,k-1/2} = \frac{1}{4} [\bar{\phi}_{i-1,j-1,k} + \bar{\phi}_{i-1,j,k} + \bar{\phi}_{i-1,j-1,k-1} + \bar{\phi}_{i-1,j,k-1}] \quad (\text{II.17})$$

Les autres variables intermédiaires de la relation (II.8) sont déterminées de façon similaire à l'expression (II.9). On peut donc déterminer pour ce cas particulier la séquence de formules suivante:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{i,j,k}^* &= \frac{1}{4} (2 \bar{\phi}_{i-1,j,k} + \bar{\phi}_{i,j,k} + \bar{\phi}_{i+1,j,k}) \\ \bar{\phi}_{i,j,k}^{**} &= \frac{1}{4} (\bar{\phi}_{i,j-1,k}^* + 2 \bar{\phi}_{i,j,k}^* + \bar{\phi}_{i,j+1,k}^*) \\ \bar{\phi}_{i,j,k}^{\tilde{}} &= \frac{1}{4} (\bar{\phi}_{i,j,k-1}^{**} + 2 \bar{\phi}_{i,j,k}^{**} + \bar{\phi}_{i,j,k+1}^{**}) \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

De même, si l'on désire évaluer une quantité filtrée avec le filtre du maillage, on utilise les relations (II.11) et (II.12) en prenant garde d'interpoler les variables

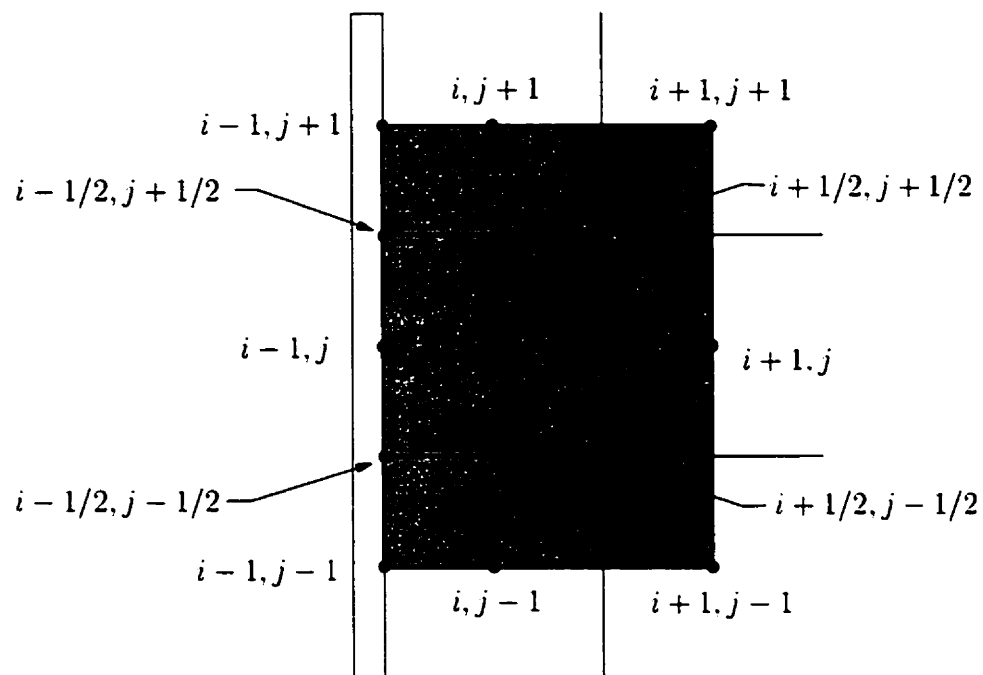


Figure II.5 Volume représentant le filtre-test touchant à une frontière externe.

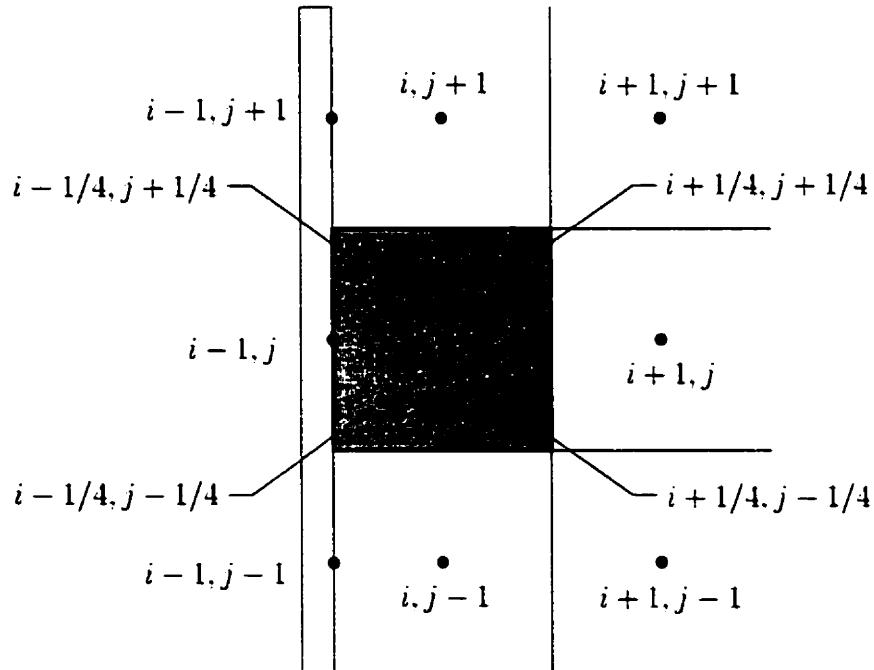


Figure II.6 Volume représentant le filtre du maillage touchant à une frontière externe.

intermédiaires touchant à la frontière externe par une expression comme suit:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{i-1/4,j+1/4,k+1/4} = \frac{1}{32} [3(\bar{\phi}_{i-1,j+1,k} + \bar{\phi}_{i-1,j,k+1} + \bar{\phi}_{i,j+1,k} + \bar{\phi}_{i,j,k+1}) + \\ 9(\bar{\phi}_{i,j,k} + \bar{\phi}_{i-1,j,k}) + \bar{\phi}_{i-1,j+1,k+1} + \bar{\phi}_{i,j+1,k+1}] \quad (\text{II.19}) \end{aligned}$$

Finalement, on exprime les formules de filtrage pour le cas où l'on utilise le filtre du maillage de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{i,j,k}^* &= \frac{1}{8} (2 \bar{\phi}_{i-1,j,k} + 5 \bar{\phi}_{i,j,k} + \bar{\phi}_{i+1,j,k}) \\ \bar{\phi}_{i,j,k}^{**} &= \frac{1}{8} (\bar{\phi}_{i,j-1,k}^* + 6 \bar{\phi}_{i,j,k}^* + \bar{\phi}_{i,j+1,k}^*) \\ \bar{\phi}_{i,j,k}^{\bar{\bar{}}} &= \frac{1}{8} (\bar{\phi}_{i,j,k-1}^{**} + 6 \bar{\phi}_{i,j,k}^{**} + \bar{\phi}_{i,j,k+1}^{**}) \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$